講義室

片対数方眼紙の改良が実験授業にもたらしたこと


荒川悦雄，鴨川　仁　　東京学芸大学教育学部自然科学系

1. はじめに

物理の学生実験授業で，学生に要求していることは，現象を視覚的に認識するとともに数式で記述することである．我々は，物理学科の学生のみならず，他の理科系の学生に対しても，物理学の実験授業を履修できるようにしている．学生の中には，数学の学習経験上の理由により，履修に対して敷居が高い者もいるようである．たとえば，片対数方眼紙や両対数方眼紙を使う実験結果の解析では，学生によっては未経験の数学的な作業を含んでいる．この工程を簡素化する工夫が施された片対数方眼紙を学生実験授業に導入し，学生の声を聞いてみた．

2. 片対数方眼紙の仕組み

値 y の対数を計算し値 $\log_r y$ を求め，縦軸横軸ともに線形目盛の普通の方眼紙に対して，この $\log_r y$ を縦軸に描画することを考える．このとき，紙面上の縮尺を調整し，見やすくするために，適当な比例係数 k を掛けて，$k \log_r y$ としてもよい．対数の底は r とする．すると，この変換により，物理でよく用いる指数関数

$$y = y_0 \exp(-x/x_e) \qquad (1)$$

は，

$$k \log_r y = k \log_r y_0 - k(x/x_e) \log_r e \qquad (2)$$

と書き換えられる．ここで，$y_0 = y(0)$ で，x_e は任意の y が $1/e$ 倍に変化するまでに要する x の変位量である．(2)式は，$Y = k \log_r y$ とおけば，傾きが $-k(1/x_e)\log_r e$ で，Y 切片が $k \log_r y_0$ である直線と見ることができる．すなわち，対数を使うと，その性質により，(1)式の指数関数という曲線が(2)式の直線に変換され，紙面上に書き表されるのである．広く知られたこの仕組みを使うと，もし片対数方眼紙上で実験結果 (x, y) が直線上にのるならば，それは指数関数的に変化する現象であるといえる．しかも，(1)式における傾き $-k(1/x_e)\log_r e$ の定量的な解析ができ，指数関数の特徴的な量 x_e を決定することができる．

片対数方眼紙では，対数に都合よく罫線が印刷されているので，電卓を使わなくても対数をとった値を描画できる．片対数方眼紙の対数軸の罫線は，基準位置とする $k \log_r 1$ からの間隔が，数値の y 倍に対して，長さが $k \log_r y$ となるように設計されている．そのため，対数軸では任意の値の定数倍変化は，常に均一間隔である．この比例係数 k は，設計上，長さの単位を持ち，対数軸の縮尺を決める定数である．対数軸における紙面上の長さ L_0 が T_0 倍に相当することが既知な場合，k は r 倍に相当する長さ $L_0/\log_r T_0$ である．同様に e 倍に相当する対数軸での長さを $L_e (= k \log_r e = L_0/\log_e T_0)$ とすると，(2)式の片対数方眼紙上の直線の傾き $-k(1/x_e)\log_r e$ は，$-L_e/x_e$ と書き改めることができる．この傾きの単位について，初学者は注意を払うべきである．紙面上で読み取れるのは，分母と分子とも，cm や mm で扱うことができる長さであるが，それぞれ線形軸の物理量の変化と対数軸の物理量が何倍変化したのかという無次元量とに，換算して考えなければならない．この L_e は k にも r にも依らないが，普遍的な長さではなく，対数軸の設計者によって自由に設定することができる．

3. 自然対数仕様の片対数方眼紙

片対数方眼紙の対数軸に対し，印刷時の縮尺に自然対数の底 e を積極的に意識して設計したり，常対数と自然対数との共通罫線を導入したりする

試みがなされている[1,2]．最近では，自然対数仕様に改良された片対数方眼紙が使えるようになった[3]．具体的には，e 倍を紙面上で3 cmのように，きりの良い整数とする規格とし，近似関係

$$e^3 = 20.0855\cdots \fallingdotseq 20 \tag{3}$$

を取り入れた共通罫線の間隔を読み取ることで，e^3 倍の長さが見つけやすくなった[1,2]．こうした自然対数仕様への改良は，物理学分野での使い勝手が向上することを期待したものである．

3.1 使用例

片対数方眼紙上で直線的に変化する現象の例として，コンデンサの放電時の経過時間 t と極板間電圧 V との関係を採り上げる．実際に観察した結果を図1に示した．自然対数仕様に改良された片対数方眼紙ではあるが，描画時の使用法は通常の片対数方眼紙と全く同じである．ここでは，図1の直線部分が，(1)式のように，指数関数

$$V(t) = V_0 \exp(-t/\tau) \tag{4}$$

で表せる場合，指数関数の特徴的な量である時定数 τ を自然対数仕様の片対数方眼紙の紙面から求める方法を示す．ここで，$V_0 = V(0)$ である．この(4)式は，任意の t から相対的に τ だけ時間変化する間に，V の値は $1/e$ 倍に変化することを表している．片対数方眼紙上における(4)式の傾きは，$-L_e/\tau$ と表される．

まず，対数軸における紙面上での e 倍の長さ L_e を知らねばならない．図1の場合，L_e は3 cmである．これは，図1で破線により修飾している共通罫線の間隔に対して，三分の一の長さとして知ることができる[1,2]．また方眼部分の外に記した用紙の規格 30 mm/10 $\log_{10} e$ dB からもわかる[3]．従来と同様，実際に定規を紙面にあてることによっても得られるが，cmの単位で，ぴったり整数の値に設計されているので，覚えやすく読み取りやすい．次に，片対数方眼紙上で，実験結果が直線的に変化する領域を見つける．この領域で，傾き $-L_e/\tau$ は，図1の結果ならば，-30 mm/36 mmである．縦軸の -30 mmは $1/e$ 倍に相当し，横軸の36 mmは36分に相当するので，これから $\tau = 36$ 分が得られる．

無理数の扱いがないことや対数の計算を行わなかったことを強調しておきたい．

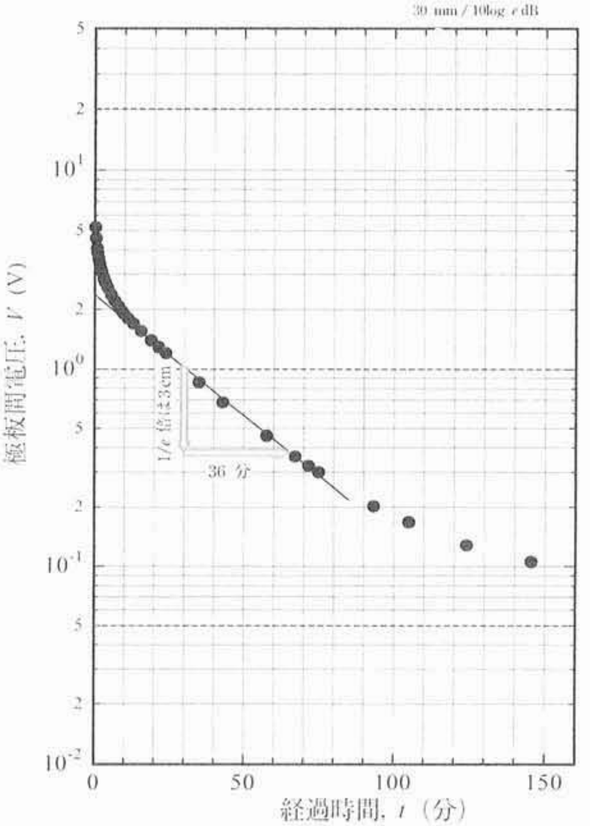

図1　自然対数仕様に改良された片対数方眼紙に測定結果を描いて解析したときの例．片対数方眼紙の原寸はA4用紙であり．自然対数仕様の共通罫線は，0.05，1，および20の3箇所に，破線で印刷されている．この図では紙面上の細かい罫線を省略した．ここに描いた例は，放電中のコンデンサの極板間電圧を時間とともに測定したものである．結果が直線的に変化する部分を実線で強調した．2本の直交する矢印が解析の過程を示している．

3.2 従来との違い

従来の規格の片対数方眼紙でも，e 倍の解析はもちろんできる．しかし，数学的に便利な e という数値そのものが無理数であるため，作業上取り扱わねばならない L_e もcmやmmの単位では，やはり無理数であった．たとえば，よく見かけるA4版の片対数方眼紙では，「63 mm×4 cycle」という規格が，方眼部分の欄外に記述されている[1]．これは，63 mmで数値が10倍となる罫線のcycle(周期)が，4周期だけ印刷されていることを意味している．したがって，この規格の場

合，e 倍に相当する長さ L_e は，63 mm / $\log_e 10$ (=27.36055･･･mm) である．ここで，1 周期の長さは片対数方眼紙の規格ごとに異なるので，L_e もその規格ごとに利用者が計算しなければならなかった．

時定数を求めるひとつのやり方として，この片対数方眼紙の利用者は，無理数で表された紙面上における対数軸の長さ 27.36055･･･mm に相当する線形軸の変化量を読み取らねばならなかった．図 1 の結果ならば，傾き $-L_e/\tau$ は -27.4 mm / 36 mm となり，縦軸の 27.4 mm はおよそ $1/e$ 倍に相当し，横軸の 36 mm から $\tau = 36$ 分が得られる．もしかすると，学生のとき，この L_e の長さを定規に印をつけて e 倍の長さを測り，対応する線形軸の変位を読み取った方もいらっしゃったのではないでしょうか．

あるいは，別なやり方として，きりの良い長さ L を自分で適当に決めて傾きを求める方法もある．L が何倍に相当するかは，自分で紙面の縮尺から $T(= T_0^{L/L_0})$ 倍であると求めなければならない．その後，L に相当する線形軸の変位量 x_T を読み取る．この x_T は e 倍に相当する量 x_e に換算しなければならない．この x_T に掛ける換算係数 $(= 1/\log_e T)$ がいくらかを考えて，これらの積として $x_e(= x_T / \log_e T)$ を計算する．

あちこちに対数や指数の計算が出てくるが，数学の得意な学生には，これくらいの作業は苦にならないだろうし，そうでない学生に対しても意義を見出せるかもしれない．しかし，指数や対数に慣れていない学生には荷が重く，物理の本質へ到達させにくくしていたようだ．

一方，自然対数仕様の片対数方眼紙は，これら従来の 2 つのやり方の長所を同時に利用するものである．e 倍に相当する長さ L_e は，きりの良い長さの 3 cm と設定した[3]．すなわち，$L = L_0 = L_e = 3$ cm，$T = T_0 = r = e$ とした．先の対数を使った換算係数が 1 となるように意図的に縮尺を定めたことと同じである．

4. 改良がもたらしたこと

本学の理科系の学生を対象とした物理学実験授業にて，図 1 のような実験を行い，この自然対数仕様の片対数方眼紙を導入した際の反響についてまとめた．対象とした実験授業は，1,2 年生向けのもので，1 クラス 28 名程度，2 年間に渡って計 8 クラスで実施した．履修生には，高校や大学の講義で関連する数学や物理学を履修したことがない者が含まれていた．各クラスには，自然対数仕様の片対数方眼紙を使用した学生と従来の片対数方眼紙を使用した学生とが混在していた．

従来の片対数方眼紙を使った時定数 τ の解析では，長い時間かけたあげく，手も足も出ずあきらめるか，「結局のところ何をやったのかよくわからなかった」という学生が多くいた．彼らは，「やっぱり物理はむずかしい」，「課題の程度が高すぎる」と不満を膨らませていた．対数に不慣れな学生でも，電卓やパソコンソフトで τ を求めることはできる．もちろん，結果を得たとしてもグラフ上における τ との対応関係を理解したわけではない．片対数方眼紙はこの理解を助けるはずであるが，使えなければそれもできない．

改良された片対数方眼紙を使用すると，単純な手順によって，この τ を簡単に求めることができた．「何が便利だったのか」の理由として，自然対数仕様であることを知っている利用者にとっては，e 倍の長さを知るまでの時間が短くなったことは特筆すべきであろう．すぐに結果が出るためか，不満の声はなくなった．すなわち，数学に関する学習歴の面で不安があっても，気にしなくてよくなったのである．単に数学的な作業が短縮されただけに留まらず，科学的な意味でのスリリングな気分を味わっているようでもあった．これは，敷居が高かったと感じていた学生にとっては，励ましとなりうる．

時定数を求める作業を通して，学生たちは自然対数仕様に改良された方眼紙が，なぜ e 倍を 3 cm に設定できたのかを論じていた．これは，誰かに指示されたわけでもない数学の理解を深める討論であった．このような話題は，従来の方眼紙

より，持ち上がりやすいのではないだろうか．進んだ学生らは，この便利さの理由に興味をもち，自ら証明せねばいられないようだった．

片対数方眼紙を使用する解析では，数学的な理解をへて，物理学的な理解がなされる．自然対数仕様に改良された片対数方眼紙を使用すると，最低限の数学的な作業によって物理学的な理解へ進むことができる．これら性質の異なるどちらの理解も重要であり，望ましい順序もあるだろう．しかし，自然対数仕様への改良は，これらの理解の順序を交換しやすくしたと考えている．

参考文献

1） 荒川悦雄，鴨川仁『自然対数仕様の刻み線を備えた対数方眼』特願2004-261327（2004年9月8日）．

2） Etsuo Arakawa, Masashi Kamogawa *The proceedings of the ICPE 2006 (TOKYO), a special issue of the Journal of the Physics Education Society of Japan*（2007）投稿中．

3） 規格30 mm / 10 $\log_{10}e$ dBの自然対数仕様の片対数方眼紙「共用」Semi Log（N），No. A4-S1は，十千万株式会社，担当 飽田 光氏より頒布していただける．

4） トチマン総合商品カタログ *TOCHIMAN PRODUCTS*, 十千万株式会社 **46**（2006）pp. 22–24.

連絡先　E-mail：arakawae@u-gakugei.ac.jp