1　マックスウェル方程式への第一歩

物理学は，なるべく少ない基本法則によって，自然界を定量的 (ということは数学的) に記述しようとする学問です．物理が好きだという人は，その理由として,「簡単な基本法則から，いろいろな運動を計算で求めたりできることに感動した」ことをあげることが多いようです．わずかの基本法則から一見ばらばらに見える現象をすっきりと統一的に謎解きしてみせるのが物理の魅力といえます.

高校物理の力学分野は，基本法則であるニュートンの運動の 3 法則（慣性の法則，運動方程式，作用反作用の法則）から，放物運動とか運動量保存の法則とかエネルギー保存則とか，色々な法則や現象を次々と導いていくという，物理の魅力に沿った，筋の通った教え方ができます.

それに比べ，高校で学ぶ電磁気分野では,「クーロンの法則」,「アンペールの法則」,「ファラデーの電磁誘導の法則」等々，たくさんの実験事実や法則が，とりとめもなく現れているように思えます．なぜ，力学のように基本法則から出発して，さまざまな法則や現象を次々と導いて見せてくれないのでしょうか．その方が，ずっと分かりやすいはずなのに．それとも，電磁気学で現れるさまざまな法則を統一的に表す基本法則自体が存在しないのでしょうか．もちろん，電磁気学にも，れっきとした基本法則があります．それらは**マックスウェル方程式**と呼ばれる 4 つの方程式で表されます.「では，高校でマックスウェル方程式を教えればいいではないか．何をもったいぶっているんだ.」と思う人も多いでしょうが，なかなかそうも行かないのです．ニュートンの運動方程式なら,

$$F = ma \tag{1}$$

のように，微積分を表面から消した形で簡単に表現できますが，マックスウェル方程式は，微積分を使わないと，表現できないのです．高校物理では,「微積分を使ってはならない」という妙な制限があるので，マックスウェル方程式はそもそも教えようがないのですが，必要な微積分自体が**ベクトル解析**と呼ばれる高校のレベルを超えたものなので，ちょっと教えにくいのです.

1.1　高等学校の復習

まずは，高校で習った電磁気学分野の復習をしましょう．ただし，電磁気学の根本，つまりマックスウェル方程式に直結する法則だけを復習することにします．オームの法則，コンデンサ，キルヒホフの法則，インダクタンス・コンダクタンスなどなど，電磁気学には悩ましい法則や言葉が続きます．これらはもちろん重要な法則や概念ではあるけれど，実は，根本的な自然法則というわけではないのです．たとえばオームの法則ですが，この法則の背後には「電荷は電場に比例した力を受ける」（クーロンの法則）という，自然界

の根本法則があるのです．しかし，根本法則を途方も無くたくさんの原子・分子の集まりである現実の物質にあてはめるとき（熱力学・統計力学を使うということです），そこにマクロな秩序が見えてくることがあります．オームの法則とは，そのようなマクロな法則なのです．

それでは，高校までに習った電磁気学の中で，どの法則が，根本法則と呼べるものだったのでしょうか．それは，点電荷間にはたらく力に関するクーロンの法則，電流間にはたらく力に関するアンペールの法則，磁場の変化が起電力を発生させるというファラデーの電磁誘導，そして，小学校の頃から知っている，磁石には必ずN極とS極がペアで現れるという法則の4つなのです．では，これらの根本法則について，もう少し詳しく考えておきましょう．

1.1.1 クーロンの法則

私たちが日常的に感じる力のひとつに，地球からの重力があります．すべて質量のある物は，地球から引っ張られているので，紙飛行機だろうとリンゴだろうと，投げたものは必ず落ちてきます.「そんなことは当たり前だ」と思うかもしれませんが，この日常的な現象と，太陽の周りを地球が回るという，一見，天と地ほども違う現象が統一的に説明できることに，ニュートンは気づきました．そう,「2つの物体は，その質量の積に比例し，物体間の距離の2乗に反比例する力で引き合う」という，万有引力の法則ですね．すべての力は物体が接触してはじめて伝わると考えられていた当時，何もない空間を隔てて，万物が引力を及ぼし合っているという法則が，当時，どれだけ衝撃的なものであったか，想像を超えたものがあります．

さて，摩擦電気で知られるように，物質は電荷という量を持つことがあり，それにより反発力や引力を受けることが知られていましたが，それをクーロンは，万有引力と同じような法則に表すことができることを実験により示しました．その内容は，

「電荷を帯びた2つの物体は，その電荷量の積に比例し，物体間の距離の2乗に反比例する力を及ぼす．その力は，電荷が同符号のとき斥力であり，異符号のときは引力である」

というものです．言葉で表すと長くなりますが，式を用いると，2つの点電荷の電荷量を Q と Q' とし，比例定数を k_e とすると，電荷間に働く力 F は，

$$F = k_e \frac{QQ'}{r^2} \tag{2}$$

です．ただし，F は，プラスのとき（つまり，$QQ' > 0$ のとき）は斥力，マイナスのとき（るまり，$QQ' < 0$ のとき）は引力を表すものとします．クーロン力は，距離の自乗に反比例して大きさが変化するという点では万有引力と同じですが，引力にも斥力にもなるという点が万有引力とは決定的に異なります．このことについては，また後で触れたいと思います．

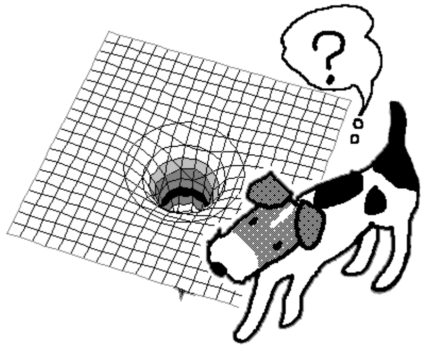

図 1: 電荷があると，空間に電場が広がる．(図のクーロン電場は Excel で描いたもの．)

さて，どうして離れた場所にある電荷間に力がはたらくのでしょうか．そこで，電場という概念が登場するのです．点電荷 Q があると，力を及ぼす相手の電荷があろうと無かろうと，空間には電場

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \tag{3}$$

が生じる，と考えるのです．つまり，電荷があると，電荷に付随して，空間に電場という新たな物理量が広がるのです．その空間に，電荷 Q' を，Q から距離 r のところに置いたとすると，Q' は

$$F = Q'E \tag{4}$$

と表わされる力を受けることになります．

「待ってくれ．これでは，クーロン力を，わざわざ 2 つの式に分けただけじゃないか」と思う人もいるでしょう．いえいえ，そうではありません．さっき，電荷があると周囲の空間に電場が生じると「考える」と述べましたが，そうではなく，実際に生じるのです．**電場は実在する**のです．どうしてそう断言できるのかというと，電場 (電磁場) はエネルギーと運動量を持つからなのです．このことは，電場の中におかれた荷電粒子は加速され運動エネルギーや運動量が増加していくことを考えれば，容易に理解されるでしょう．もう少し詳しく説明するために，この世には電場と荷電粒子しかいないという架空の状況を考えます．すると，エネルギー保存則や運動量保存則が成立するからには，荷電粒子の得たエネルギーや運動量は電場からもらうしかありません．つまり，電場はエネルギーや運動量を有する存在なのです．物理では，エネルギーや運動量を持つものを，実在と考えるのです．

話を戻しましょう．(3) 式の比例定数 k_e は，標準となっている SI 単位系を

用いると

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{5}$$

と表すのが習慣です．ここに，ϵ_0 は真空の誘電率という怪しげな名前で呼ばれる量で，$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ です．これはあくまで単位系のとり方から決まってくる話なので,「真空の誘電率とは何だろう」などと悩んだり考え込んだりしても無意味ですから気をつけてください．

1.1.2　電流のつくる磁場

次に控える重要な法則は，アンペールの発見した，平行な２つの直線電流の間にはたらく力に関する次の法則です．

「平行に置かれた 2 本の導線に電流が流れているとき，その導線には距離に反比例し，電流の強さに比例する力がはたらららく．力の向きは，電流の流れる向きが同じときは引力，反対のときは斥力となる」

このことを式で表すと，導線の単位長さあたりにはたらく力 F は，導線間の距離を R，電流を I, I'，比例定数を k_m として

$$F = k_m \frac{II'}{R} \tag{6}$$

となります．なぜ，電流間に力がはたらくのでしょうか．それは，電流があると，その周囲の空間に磁場 (磁束密度と呼ばれる)

$$B = k_m \frac{I}{R} \tag{7}$$

が生じるためなのです．力を及ぼす相手があろうとあるまいと，とにかく電流が存在すれば空間に磁場という物理量が付与される．そして，磁場の生じている空間に別の電流 I' が置かれると，大きさが

$$F = I'B \tag{8}$$

で表される力がはたらくことになる，というわけです．

電流は磁場の源であり，磁場は，磁石を動かす力の源です．しかし，電荷が電場の源であるのとは異なり，磁場の本当の源は「磁荷」ではないことに注意しましょう．**磁場の源は，電流**なのです．もっとも，磁石が磁場の源だと思っていたとしても，小学校のときから磁石の力に慣れ親しんできたのだから，無理はありませんね．磁石の力は，実は磁石の中に存在する電子が自然に動き回ることにより生じている，ミクロな電流[1]に起因するのです．この電子のミクロな運動は，いくら磁石を眺めていても見えませんが.

[1]本当は，天然磁石の本当のしくみは量子力学でなければ完全には説明できません.

1.1.3　電磁誘導

最後に，ファラデイの電磁誘導の法則を復習しましょう．磁石をコイルに出し入れすると電流が生じるという，あの法則です．電線の内側の面積を S とし，磁束という量を $\Phi = BS$ で定義します．磁石を動かすことにより電線の囲む面上の磁束密度が変化すれば，磁束の大きさも変化します．このとき，電線に生じる起電力 V は

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{9}$$

で表される，というのがファラデイの電磁誘導の法則でしたね．これが 3 番目の鍵の式です．

なお，起電力という言葉については，少々注意が必要です．というのも，電位と起電力をごっちゃにしている人がいるからです．起電力はその名の通り電気を引き起こす能力を表していて，閉回路における単位電荷にする仕事を表すわけです．つまり，ある閉曲線 C を自由に動ける電荷 Q があったとすると，磁場の変化によって生じた起電力により，電荷は $W = QV$ の仕事をされるということを，ファラデイの電磁誘導の法則は表しているのです．一方，静電場中である曲線に対する仕事は，その始点と終点の電位差に等しいのですが，閉曲線の場合は始点と終点の電位差は 0(当たり前) になるから，仕事も 0 となります．このことから考えても，起電力としての V と，静電場における静電位の V を混同してはならないことが分かります．

1.2　マックスウェル方程式を見てみよう

これまでに復習した 3 つの基本法則を，マックスウェル方程式風に書き直してみましょう．このことにより，マックスウェル方程式とは何かを考える手がかりを得ることができるはずです．

まず最初に，クーロン場とマックスウェル方程式のつながりを見ましょう．(3) 式に $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ を代入した式，

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{10}$$

を，次のように書き直します．

$$(4\pi r^2)E = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{11}$$

ここで，$4\pi r^2$ は，半径 r の球の表面積です．そこで，これを積分の記号を使って，

$$4\pi r^2 = \int_S dS \tag{12}$$

と表しておきましょう．これは，**面積分**と呼ばれる積分で，添え字の S は積分する表面範囲を表す記号です．今の場合，S は「原点を中心とする半径 r

の球面」を現しているわけです．面積分については後で詳しく説明しますが，今は，球の表面積を「細かく分けて足し合わせる記法」で表しただけ，と解釈してください．上の 2 式より，

$$E \int_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{13}$$

と書き直せますが，電場 E は球面上で一定の値をとるので，積分の中に入れてもかまわない．つまり，

$$\int_S E\, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{14}$$

と書いても良いわけです．この式はクーロンの法則 (10) 式の単なる書き直しとして導かれましたが，実はもっと一般的に成立する式なのです．というのは，積分内の電場 E を表面に垂直な成分を表すものとするならば，表面積分を球に限らない任意の閉じた曲面と考えても，(14) 式はやはり成立しているのです．この場合，Q はその閉曲面内部にある全電荷量を表すことになります．そして，この一般的に成立する式が，実は，マックスウェル方程式の第 1 の式なのです．

次に，アンペールの法則をマックスウェル方程式の形に書き直してみましょう．(7) に $k_m = \mu_0/(2\pi)$ を代入した式

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \tag{15}$$

を

$$(2\pi R)B = \mu_0 I \tag{16}$$

と書き直します $2\pi R$ は半径 R の円周を表しますから，それを**線積分**の記法を用いて

$$2\pi R = \int_C ds \tag{17}$$

と表しましょう．ここに C は，原点を中心とする半径 R の円を表します．すると，(16) 式は

$$\int_C B\, ds = \mu_0 I \tag{18}$$

と書き直せることが分かります．ただし，I は半径 R の円周上では一定なので，積分記号の中に書いても良いことを利用しました．

(18) 式は，実は任意の閉じた曲線 C に対しても成立する式なのです．ただし，B はその閉曲線に接する成分，I は閉曲線内に含まれる全電流を表すものとします．このとき，方程式は，マックスウェル方程式の一つを静磁場に当てはめた，一般的な法則を表すものとなります．

最後に，ファラデイの電磁誘導の法則をマックスウェル方程式風に書き直しましょう．まず，磁束を面積分の形に書きます．

$$\Phi = \int_S B\, dS \tag{19}$$

一方，起電力は，単位電荷あたりにする仕事を表すのでしたね．この仕事の源である力は電場であって，その電場が電荷に $F = QE$ なる力を及ぼすことにより電荷は運動エネルギーを得る，つまり仕事をされるのです．したがって，閉曲線に沿った起電力は

$$V = \int_C E\, ds \tag{20}$$

と表せる．これらを (9) 式に代入し，$\Delta t \to 0$ の極限をとると，

$$\int_C E\, ds = -\frac{d}{dt}\int_S B\, dS \tag{21}$$

と書き直せることになります．ただし，E は閉曲線 C に沿った電場の成分，また B は曲面に垂直な磁束密度の成分を表すものとします．これも，マックスウェル方程式の一つです．

さて，今まで，マックスウェル方程式という言葉を何度も使ったのですが，それがいったい何なのかは説明してきませんでした．ここで，その全容を紹介しておきましょう．

$$\begin{aligned}
\int_S E_n\, dS &= \frac{Q}{\epsilon_0} && (22)\\
\int_C B_{||}\, ds - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S E_n\, dS &= \mu_0 I && (23)\\
\int_S B_n\, dS &= 0 && (24)\\
\int_C E_{||}\, ds + \frac{d}{dt}\int_S B_n\, dS &= 0 && (25)
\end{aligned}$$

ただし，積分内の電場や磁束密度は，線積分の場合は曲線に接する成分 (添記号 $||$)，面積分の場合は曲面に垂直な成分 (添字 n) をとるものと約束します．また，c は光速を表します．(22) 式と (25) 式はクーロンの法則と電磁誘導の法則を書き直したものとして見覚えがありますね．しかし，(23) 式はアンペールの法則を書き直したものに新たな項が加わっていて，しかも光速が現れるところなど，神秘的ですらあります．また，(24) 式は初めてお目にかかるものです．これら 4 つの方程式が，ありとあらゆる電磁気現象を記述する根本的な法則を表しているのです．その方程式が，高校で習った法則と結びついていることを知った皆さんは，マックスウェル方程式を理解する上での大きな一歩を，すでに踏み出しているのです．

1.3　場とは何か

マックスウェル方程式をさらに深く学ぶ前に，電場や磁場といった,「場」とはそもそもどのような概念なのかを，ここで考えておきましょう．

量子場といった言葉に代表されるように，現代物理学にとって，場の概念

こう言ってしま

れませんね．そ

く自然なものな

ビル風のような

図 2: 風速はベクトル関数

強い風が吹いているかと思うと，ちょっとした物陰では，風がほとんどなかったりする．決してすべての場所が同じ風速になっていたりはしません．つまり，風速は，場所によって変わる．このことを，数学的に表現すれば,「風速は，位置の関数である」ということになりますね．関数というと，$y = f(x)$ を思い浮かべるでしょうが，風速の場合は，地表の位置を表すために，タテとヨコの 2 次元が必要です．いや，風速は高さによっても違うから，3 次元の座標 x, y, z が，考えている風速の場所を表すために必要ですね．つまり，ある場所 (x, y, z) の風速を v とすると，$v(x, y, z)$ という関数によって，風速は表される.「いや，例え同じ場所でも，時間が違えば風速は変わるぞ」と気づいたアナタ，よく考えていますね．そうです，風速は時間の関数でもある．そこで，$v(x, y, z, t)$ と表すことにします．風速のように身近な例でも，何と 4 つの変数を持つ関数なのですね．このように，空間もしくは時空間に広がった物理量を，場の量といいます．

「風速って，向きもあるじゃない！$v(x, y, z, t)$ じゃ，大きさだけしか表せないよ．風が南風なのか，東風なのか，わからないよ！」ほう，大変，大事なことに気づきましたね. 風速は, 大きさだけでなく, 向きを持つ量, すなわちベクトルなのです. 風向は上下にも変化するので, その向きを表すためには, 3 次元の成分が必要になります．つまり，$(v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t))$ という，3 つの関数の組となります．このようにベクトルで表される場の量を，ベクトル場といいます．なお，毎回このように x, y, z と書くのはメンドウということで，これをまとめて $\mathbf{r}$ と書くことが多いです．また，ベクトルの 3 成分をまとめて，$\mathbf{v}$ と表します．すなわち，$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t))$

と表せるわけです．

それに対して，方向がなく大きさだけの場の量を，スカラー場といいます．たとえば，温度がその例です．温度も，日向や日陰で温度は違うし，同じ場所でも時々刻々値が変わっていきます．つまり，$T(x,y,z,t)$ と表されるような，場の量なのです．もう少しスケールの大きなものを例にだせば，気圧も意外と身近なスカラー場の例でしょう．中学校のとき，天気図を描いて，高気圧とか，低気圧とか，気圧の等高線を描いて学んだことだと思います．あれも，２次元的ですが場所場所で異なる場の量で，気圧の場合，向きを持たない大きさだけの量なので，スカラー場なのです．