

## [運動方程式の意味]

Newton の運動方程式は

$$ma = \mathbf{F} \quad (1)$$

である。これは、質量  $m$  の (質点とみなせる) 物体に力  $\mathbf{F}$  が加わったとき、物体は加速度  $\mathbf{a}$  を持つことを表す。ところで、加速度とは、「速度の変化の割合」である。つまり、 $\Delta t$  を、「速度の変化が一定とみなせるくらい短い時間」(すなわち、加速度が一定とみなせるくらい短い時間) とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2)$$

である。ところが、時々刻々変化する速度に対しては、一般的に「速度の変化が一定とみなせるくらい短い時間」は、正確に扱おうとすると、限りなく小さい値にならざるを得ないのは当然である。そこで、数学的には

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

と、微分を使って表されるのである。ただし、注意すべきことは、実験的にはいつでも有限の時間の測定しかできないので、(2) 式の意味での加速度しか測定できないことに注意しよう。

同様に、速度は「位置の変化の割合」であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4)$$

である。さて、(2) 式と (4) 式は、次のように書き直せる。

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t)\Delta t \quad (5)$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t \quad (6)$$

この 2 つの式は、

1. 時刻  $t$  での速度と加速度が分かれば、少し進んだ時刻  $t + \Delta t$  での速度が求まる
2. 時刻  $t$  での位置と速度が分かれば、少し進んだ時刻  $t + \Delta t$  での位置が求まる

ことを意味している。これによって、(1) 加速度が分かれば、(2) 初期の位置と速度を与えることにより、任意の時刻の位置 (と速度) が求まるのである。