物理学 (電磁気学) 補習：Gauss の法則 (担当：新田)

0.1 直線上に一様に分布した電荷のつくる静電場

0.1.1 直接的な方法

電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられた場合、Coulomb の法則を一般化した公式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r} \tag{1}$$

を用いれば、原理的にはどんな電場でも求めることができる。しかし、対称性のある電場の場合、Gauss の法則を用いて電場を求める方が、はるかに簡単である。

ここでは、比較のために無限に長い直線上に一様に分布した電荷のつくる静電場を、上の公式から直接求めてみよう。

直線上に電荷が線密度 ρ_l で一様に分布しているとする。このとき、3 次元の密度 $\rho(\mathbf{r})$ は、デルタ関数を用いて

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_l\delta(y)\delta(z) \tag{2}$$

と表すことができる。(2) 式を (1) 式に代入すると、($|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ などに注意して)

$$\begin{aligned}
&(E_x, E_y, E_z)\\
=\ & \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\\
&\int \frac{\rho_l\delta(x')\delta(y')(x-x', y-y', z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}^3}dx'dy'dz'\\
=\ & \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x,y,z-z')}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}}dz' \qquad (3)
\end{aligned}$$

となる。この後の計算は、x, y 成分と z 成分ではやや異なる。x 成分に関して計算する。$x^2+y^2=R^2$ と置き、また $z-z' = R\tan\theta$ と変数変換して積分すると、($dz' = (R/\cos\theta)d\theta$ に注意)

$$\begin{aligned}
E_x(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{x}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}}dz'\\
&= \frac{\rho_l x}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}dz'\\
&= \frac{\rho_l x}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{R/\cos^2\theta}{R^3/\cos^3\theta}d\theta\\
&= \frac{\rho_l x}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\\
&= \frac{\rho_l x}{2\pi\epsilon_0 R^2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

を得る。E_y は、$x \iff y$ なる入れ替えにより $E_y = \rho_l y/2\pi\epsilon_0 R^2$ と求まる。また、$E_z = 0$ となることは、被積分関数が $z-z'$ に関して奇関数であることから直ちに言える。(確かめよ。) 以上より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right) \tag{5}$$

となることが分かる。

なお、N 個の点電荷がつくる静電場を表わす式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \tag{6}$$

に戻って考えてもよい。この場合、位置 $\mathbf{r}_i$ にある点電荷 Q_i は、直線上に一様分布した電荷を微小な長さ dz' で区切り、それを点電荷として見なす。すなわち、$Q_i = \rho_l dz'$ とする。

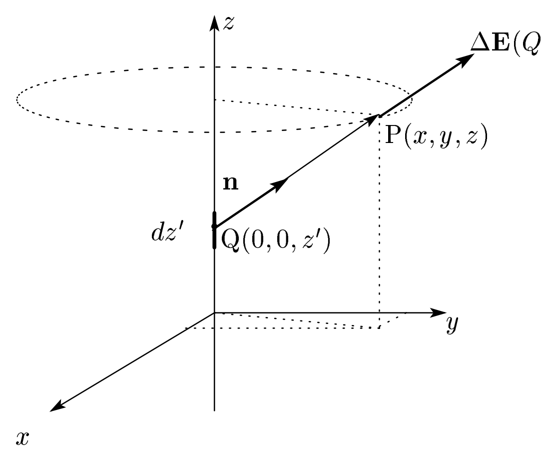

図 1:

これに応じて、点電荷の座標は $\mathbf{r}_i \to (0,0,z')$ となり、また、(6) 式の i に関する和は z' に関する積分に置き換わる：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_l dz'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{7}$$

ただし、$\mathbf{r}' = (0,0,z')$ である。後は、(3) 式以降の計算と同じになる。

0.1.2　Gauss の法則と対称性を用いる方法

今考えている「直線上に一様に分布した電荷のつくる静電場」のように、対称性のよい電荷分布のつくる静電場を求める場合、対称性を利用した考察から電場の方向を定め、Gauss の法則

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0}(S\text{ で囲まれた領域内の総電荷}) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} \qquad (8)\end{aligned}$$

を用いて電場の大きさを決めるやり方が有効である。(V は S で囲まれた領域内の空間を表す。)

まず、無限に長い直線を考えているのだから、図 2 で点 A と点 B で場が異なる理由が無い。電荷分布は軸対称だから、x 軸、y 軸方向の方角によって値が異なるはずがない。よって、電場の大きさは軸からの距離のみの関数である。また、電場の方向は、上下の区別が無いものでなければならない。したがって、放射状の方向のみが許される。以上より、次の事が分かる。電場の方向は、直線を軸とする半径 R の円柱の側面に対して垂直であり、大きさはその円柱上の全ての点で等しい。

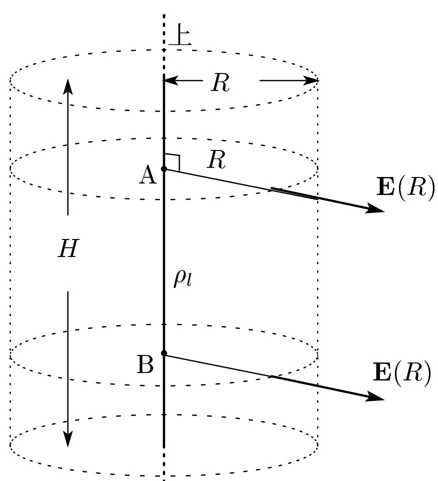

図 2:

さて、直線を軸とする高さが H、上下面の半径が R の円柱を考え、これに Gauss の法則 (8) 式をあてはめてみよう。

$$\begin{aligned}&\oint_{\text{円柱の表面}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \\ =\ &\int_{\text{下面}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上面}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{側面}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \quad (9)\end{aligned}$$

円柱の上面と下面の面上に電場の方向はあるから、これらの面の法線ベクトルと電場の内積は 0 となる。よって、上式の第 1、2 項は 0。一方、側面の法線ベクトルと電場の方向は平行であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\text{側面}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} &= \int_{\text{側面}} E(R)dS \\ &= E(R)\int_{\text{側面}} dS \\ &= E(R)2\pi RH \qquad (10)\end{aligned}$$

となる。また、(8) 式の右辺の総電荷は、今の場合 $\rho_l H$ である。よって

$$E(R)2\pi RH = \frac{\rho_l H}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R} \qquad (11)$$

を得る。これは、方向まで含めて表わすと、解 (5) 式に一致する。

0.2　無限に長い円柱内に一様に分布した電荷のつくる静電場

前節で学んだことを拡張してみよう。

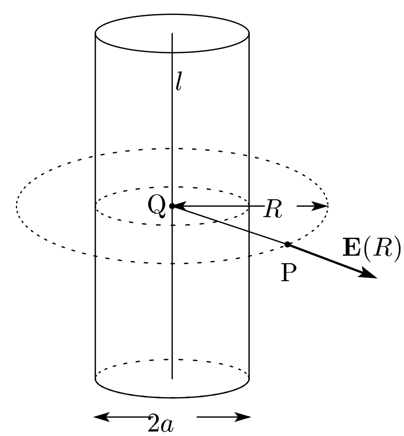

図 3:

図 3 のように、軸を l、半径を a とする無限に長い円柱内に一様に分布した電荷 (電荷密度を ρ_0 とする) のつくる静電場を求める。

前節と同様の対称性の議論から、電場は軸からの距離 R のみの関数で、その方向は図の $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ に等しい。

電場の大きさは、R の値の範囲によって異なる。

(i) $R > a$ のとき：

半径 R, 高さ H の円柱の領域に (8) 式を当てはめたとすると、

$$\begin{aligned}(2\pi RH)E(R) &= \frac{1}{\epsilon_0}(\pi a^2 H)\rho_0 \\ \Rightarrow E(R) &= \frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0 R} \quad (12)\end{aligned}$$

この結果は、0.1.2 節の場合と本質的に同じである。

(ii) $R < a$ のとき:

上と同様に計算するが、右辺の領域内の電荷の総量が変化することに注意。

$$\begin{aligned}(2\pi RH)E(R) &= \frac{1}{\epsilon_0}(\pi R^2 H)\rho_0 \\ \Rightarrow E(R) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}R \quad (13)\end{aligned}$$

(i)(ii) を合わせてグラフを描くと、図 4 のようになる。$R > a$ 即ち円柱の外側では、あたかも全電荷が軸にあるかのような電場になるが、$R < a$ 即ち円柱の内部に入ると、中心に近づくにつれて電場は弱まる。

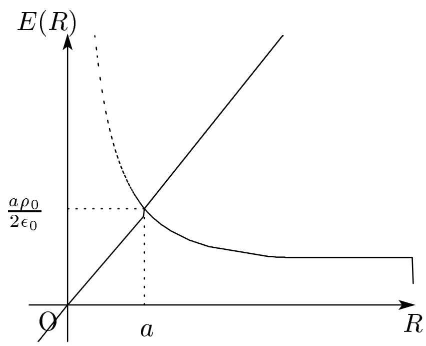

図 4:

0.3 無限に長い円環内に一様に分布した電荷のつくる静電場

さらに、内径が b、外径が a である、無限に長い円環状の一様電荷分布がつくる電場を求めてみると、

(i) $R > a$ のとき

$$\begin{aligned}2\pi RHE(R) &= \frac{1}{\epsilon_0}\pi(a^2 - b^2)H\rho_0 \\ \Rightarrow E(R) &= \frac{\rho_0(a^2 - b^2)}{2\epsilon_0}\frac{1}{R} \quad (14)\end{aligned}$$

(ii) $a > R > b$ のとき

$$\begin{aligned}(2\pi RH)E(R) &= \frac{1}{\epsilon_0}[\pi(R^2 - b^2)H]\rho_0 \\ \Rightarrow E(R) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\frac{(R^2 - b^2)}{R} \quad (15)\end{aligned}$$

(iii) $R < b$ のとき

$$\begin{aligned}2\pi RHE(R) &= \frac{1}{\epsilon_0} \times 0 \\ \Rightarrow E(R) &= 0 \quad (16)\end{aligned}$$

以上の結果で $b \to 0$ とすれば、前節の円柱の結果に移行する。(iii) の場合のように、電荷が内部に無ければ、外部に電荷分布があっても (本問題のような対称性がある場合には) 電場は 0 になることがある。何故か？打ち消し合うから。