

学 習 指 導 案

日時 平成 26 年 ○月 ×日 第 △時限

場所

学級 1 年 1 組 (男子 20 名、女子 20 名、計 40 名)

学級所見

指導者 石川弥、小林奈津花、須賀与恵、菅原恵美

単元名 図形と方程式(軌跡と領域)

授業の意図

線形計画法は複数の条件のもとで最適解を求める方法であり、畜産業や石油精製業、金融・証券業などで実際に使われているシンプルであるが非常に有用な問題解決の方法である。高校数学では数学Ⅱの「図形と方程式」の単元における、「軌跡と領域」で扱われる内容となっている。しかし、教科書に従った指導では「最大・最小を求めるときは $=k$ と置く」という形式的なものにとどまってしまう。線形計画法のよさは「 $=k$ 」と置くことで簡潔に解決できることである。しかし、それは結果としてわかったことであって、生徒が最初から気づくことではない。線形計画法という方法を作り出す過程で、自らの解決を振り返ったり考えたりしながら、実感と必要感を伴った理解を積み重ねることが大切であると考える。

本時では表を用いて解決できる問題場面を用意し、表での解決を見直すことでグラフや式との関連付けを図る。グラフや領域の表す意味について考えながら学習を進めることが、線形計画法の考え方の理解につながると考える。そして次時では、表での解決ができない場面を用意し、線形計画法の良さを実感することを目指す。そうすることにより、自分のものとして使っていける道具になると考える。ちなみに、生徒は小単元「軌跡と領域」の、不等式や連立不等式の表す領域を図示することまでは既習である。また、線形計画法を作り出すまでには、グラフと表、式、事象の関係を考えることが必要となる。「表のこの部分はグラフのどこに現れているのか」、「グラフに現れているこのことは事象の何に対応するのか」などである。このようなグラフと表、式、事象の行き来ができるようになれば、今回扱う問題だけに限らず、グラフを用いて問題を解決する力を養うことにもつながるのではないだろうか。

また、現代では、不規則な生活による食生活の乱れが指摘されており、「食育」の必要性が指摘されている。特に高校生の場合は、自分で食事を買う機会が増えていくことから、栄養素の偏りなどが問題視されている。本教材においては、家庭科との連携をとり、自分自身の食生活を見直し、きちんとした食事をとることの大切さを学ばせる機会にしたいと考えている。

指導計画

家庭科 単元「楽しく食べる」			
次	小単元	ねらい	学習活動
1	「食べる」とは 栄養と食事	各栄養素の大切 さを知る。	<ul style="list-style-type: none"> ・自分の食生活を振り返り、食生活の問題点について考える。 ・各栄養素の種類と機能を知る。 ・各栄養素が不足することによる害を知る。 ・各栄養素が含まれている食材を知る。
		自分たちの食生 活を見直す。	<ul style="list-style-type: none"> ・自分の食生活を、栄養素に着目して振り返る。 ・栄養所要量と自分の実際の栄養摂取量を比較して、不足している栄養素と不足量を求める。
3	栄養と食事	栄養についての 理解を生活に活 かす。	<ul style="list-style-type: none"> ・どのように食生活を改善すると良いかを考える。 ・献立を考える。

数学科 小単元「軌跡と領域」 「連立不等式の表す領域」		
次	ねらい	学習活動
1	「不等式の表す領域」での学 習を活かし、連立不等式と図 示される領域の関係を理解す る。	<ul style="list-style-type: none"> ・連立不等式で表された領域を図示する。
		<ul style="list-style-type: none"> ・不等式 $AB > 0$ の表す領域を図示する。
2	グラフと表、式、事象を関連づけて、グラフや領域の意味を考 える。	<ul style="list-style-type: none"> ・二つの栄養素を十分に摂取するときのサプリメントの組み合わせ方を考え、1年間にかかる費用を求める。
		<ul style="list-style-type: none"> ・グラフと表、式、事象を関連づけてグラフでの意味を考える。 ・費用の規則性を探究する。
3	線形計画法の考えを理解し、そ の簡潔さを実感する。	<ul style="list-style-type: none"> ・表を用いた解決ができない(条件を満たす x と y の値が有理数、または表があまりに長くなるような問題)問題に取り組む。 ・「線形計画法」が実際に使われている場面を知る。
		<ul style="list-style-type: none"> ・費用の規則性を探究する。
5	線形計画法を用いることを通 して、そのよさを実感する。	<ul style="list-style-type: none"> ・表を用いた解決ができない(条件を満たす x と y の値が有理数、または表があまりに長くなるような問題)問題に取り組む。 ・「線形計画法」が実際に使われている場面を知る。

本時の指導 領域の最大・最小 (第 3, 4時間目 / 5時間中)

本時の目標 表、式、グラフ、事象を関連づけ、グラフや領域が表す意味を考えること。
線形計画法の考えを理解し、その簡潔さを実感すること。

使用教科書 なし

準備するもの Geogebra(ペアでパソコンを1台)、電卓(一人1つ)

指導過程

時間	学習のねらいと発問	学習活動(予想される反応)	★評価 ※配慮事項																																														
1	<p>1. 問題提起</p> <p>・家庭科で調べたデータを提示する。</p> <p>「私たちは1日に必要な栄養素を十分に摂取できていないことがわかりました。」</p> <table border="1" data-bbox="172 757 676 1016"> <caption>栄養所要量(mg,ビタミンAのみμgRE)</caption> <thead> <tr> <th></th> <th>男</th> <th>女</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>カルシウム</td> <td>800</td> <td>700</td> </tr> <tr> <td>鉄</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>マグネシウム</td> <td>209</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>ビタミンA</td> <td>600</td> <td>540</td> </tr> <tr> <td>ビタミンC</td> <td colspan="2">90</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="172 1048 676 1308"> <caption>平均摂取量(mg,ビタミンAのみμgRE)</caption> <thead> <tr> <th></th> <th>男</th> <th>女</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>カルシウム</td> <td>592</td> <td>503</td> </tr> <tr> <td>鉄</td> <td>8.5</td> <td>7.2</td> </tr> <tr> <td>マグネシウム</td> <td>259</td> <td>215</td> </tr> <tr> <td>ビタミンA</td> <td>576</td> <td>538</td> </tr> <tr> <td>ビタミンC</td> <td>112</td> <td>98</td> </tr> </tbody> </table> <p>「また、A君が1週間の栄養素の平均摂取量を調べた結果、このようになりました。」</p> <table border="1" data-bbox="220 1464 596 1702"> <caption>A君の平均摂取量</caption> <tbody> <tr> <td>カルシウム</td> <td>590</td> </tr> <tr> <td>鉄</td> <td>8.5</td> </tr> <tr> <td>マグネシウム</td> <td>245</td> </tr> <tr> <td>ビタミンA</td> <td>590</td> </tr> <tr> <td>ビタミンC</td> <td>110</td> </tr> </tbody> </table> <p>「不足している栄養素を補う方法として、サプリメントの摂取が考えられます。A君がサプリメントを摂取することで不足している栄養素を補うことは、費用の面から見て現実的でしょうか。」</p>		男	女	カルシウム	800	700	鉄	10	12	マグネシウム	209	250	ビタミンA	600	540	ビタミンC	90			男	女	カルシウム	592	503	鉄	8.5	7.2	マグネシウム	259	215	ビタミンA	576	538	ビタミンC	112	98	カルシウム	590	鉄	8.5	マグネシウム	245	ビタミンA	590	ビタミンC	110	<p>・カルシウムと鉄が不足しており、食事では補いにくいことを振り返る。</p> <p>「カルシウムと鉄が特に足りていない。」</p> <p>「高そう。」</p> <p>「種類によっては私たちでも買えるんじゃないかな。」</p>	<p>※家庭科の学習で1週間の食生活の栄養摂取量を記録させ、その学習と繋げるとよいだろう。</p>
	男	女																																															
カルシウム	800	700																																															
鉄	10	12																																															
マグネシウム	209	250																																															
ビタミンA	600	540																																															
ビタミンC	90																																																
	男	女																																															
カルシウム	592	503																																															
鉄	8.5	7.2																																															
マグネシウム	259	215																																															
ビタミンA	576	538																																															
ビタミンC	112	98																																															
カルシウム	590																																																
鉄	8.5																																																
マグネシウム	245																																																
ビタミンA	590																																																
ビタミンC	110																																																

・2つのサプリメントのデータを提示する。
「鉄が多いサプリメントとカルシウムが多いサプリメントを選んできました。」

		DHC	ディア ナチュラ
価格(円)		400	600
内容量(粒)		100	100
1粒 あたり (mg)	カルシウム	72	130
	鉄	0.8	0.6
	マグネシウム	27	17
	ビタミンA	0	150
	ビタミンC	40	27
※ビタミンAのみμgRE			

「A君が不足しているカルシウムと鉄を摂取するには、1年間でいくらかかるだろうか。」

A君が不足しているカルシウムと鉄を補うためにサプリメントを摂取するとき、1年間で費用を最も安くするにはそれぞれのサプリメントをいくつつ購入すればよいか。

・A君の1年間に不足している栄養素の量と、サプリメント1ケースあたりの値段と栄養素の量を全体で確認する。

1年間の不足栄養素量(A君)	
カルシウム	76650
鉄	547.5

1ケースあたり	DHC	ディア ナチュラ
価格(円)	400	600
カルシウム(mg)	7200	13000
鉄(mg)	80	60

2. 自力解決

「カルシウムを摂取するにはディアナチュラの方がいいし、鉄を摂取するにはDHCがいい。」

「A君のカルシウムと鉄の不足量は1日でそれぞれ210mgと1.5mgだから、1年間では365倍して76650mgと547.5mg。」

「DHCとディアナチュラはそれぞれ1ケースに100粒ずつ入っているのだから、1ケースには(1粒あたりの栄養素)×100だけの栄養成分量があることになる。」

1. それぞれのサプリメントについて、片方だけを買うときに必要になる個数と費用を求め、比較する。(組み合わせることを考えていない。)

DHCだけ買うと、
カルシウム: $76650 \div 7200 = 10.6\dots$
鉄: $547.5 \div 80 = 6.84\dots$
かかる費用は $400 \times 11 = 4400$ (円)

※計算することは目的でないで電卓を使って全体で確認する程度にする。

ディアナチュラだけ買うとすると、
 カルシウム: $76650 \div 13000 = 5.89\dots$
 鉄: $547.5 \div 60 = 9.125$
 かかる費用は $600 \times 10 = 6000$ (円)
 従って、DHCを11個買うとき安くて4400円。

2. どちらか一方を適当な個数だけ買うことにし、そのときもう一方がいくつ必要かを考えることから費用を求める。(一番安くなる根拠はない。)

DHCを3個買うとすると、
 カルシウム: $7200 \times 3 = 21600$ (mg)
 残りは、 $76650 - 21600 = 55050$ (mg)
 鉄: $80 \times 3 = 240$ (mg)
 残りは、 $547.5 - 240 = 307.5$ (mg)
 ディアナチュラをいくつ買えばいいかを考える。

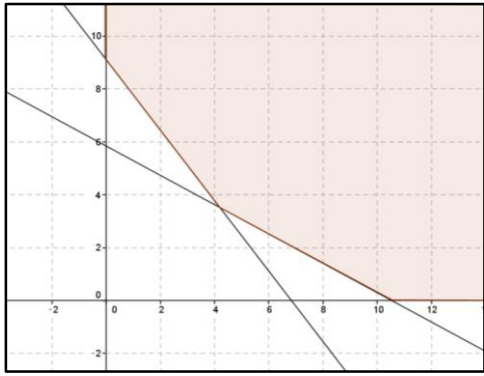
カルシウム: $55050 \div 13000 = 4.23\dots$
 鉄: $307.5 \div 60 = 5.125\dots$
 従って6個買えばよい。だからかかる費用は DHCを3個、ディアナチュラ6個で
 $400 \times 3 + 600 \times 6 = 4800$ (円)

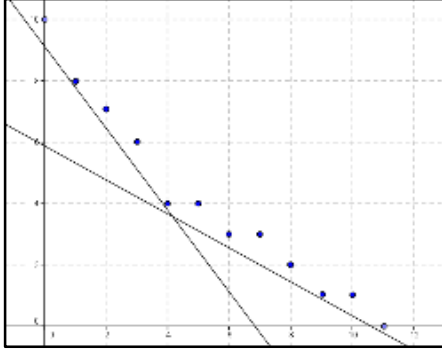
3-1. 全てがDHC(またはディアナチュラ)だったときを考え、そこから規則的に、DHCを1個減らしたときディアナチュラはいくつ必要になって、そのときの費用はいくらになるかを考える。全ての場合を求めて一番安くなる時を探そうとする。(答えは求められるが全ての場合を計算しなくてはいけない。)

3-2. それを表にまとめる。

DHC	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
ディアナチュラ	0	1	1	2	3	3	4	4	6	7	8	10
費用	4400	4600	4200	4400	4600	4200	4400	4000	4800	5000	5200	6000

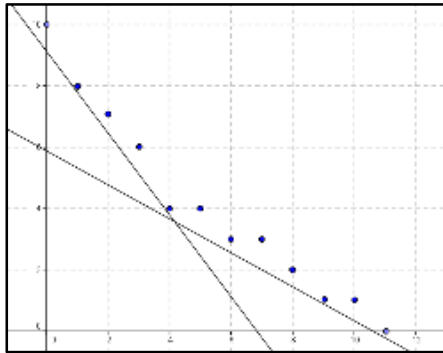
それぞれ4個ずつの時、4000円

<p>3. 発表</p> <ul style="list-style-type: none"> •1の考えを取り上げる。 <p>「二つのサプリメントを組み合わせたらもっと安くならないだろうか。」</p> <ul style="list-style-type: none"> •2, 3の考えを取り上げる。 <p>「2は本当に一番安い場合かな。」</p> <p>「3で答えはわかったね。この方法は必要なサプリメントの個数を求めるとき、誰に対してでも使えそうですか？」</p> <ul style="list-style-type: none"> •4, 5の考えを取り上げる。グラフ・領域と、表とを関連付け、領域が表すものの意味を考えさせる。 	<p>4-1. DHC の個数を x、ディアナチュラの個数を y と置いて、文字式や不等式などで表す。(求める範囲は分かるが、そこからどうしてよいかわからない。)</p> <p>DHC を x 個、ディアナチュラを y 個買うとすると、条件を満たすのは</p> $7200x + 13000y \geq 76650$ $80x + 60y \geq 547.5 \quad \text{となるとき。}$ <p>4-2. 2つの不等式を満たす領域を示す。</p>  <p>5. 二つの不等式に加えて、費用についての式もたてようとする。(形式的処理をしようとするがうまくいかない。)</p> $7200x + 13000y \geq 76650$ $80x + 60y \geq 547.5$ $400x + 600y = ?$ <p>「表にするとわかりやすい。」</p> <p>「でも、表が長くなったら計算するのがめんどくさい。」「でも、費用の変化が不規則だから全部計算しないとわからない。」</p>	
---	---	--

	<p>「式やグラフで考えた人もいましたが、解決はできなかったようです。」</p> <p>「二つの不等式から決まるこの領域は、何を表していますか？」</p> <p>「本当にそうですか？表にあるサプリメントの個数の組み合わせは領域のどこにありますか？」</p> <p>「(領域内にあるその他の点について)この点は領域の中にあるけど、答えにはならない？」</p> <p>「答えは必ず領域の中にあって、直線に近い方が費用が安く済むということがわかりましたね。」</p> <p>「さて、このような問題を解決するときは、いつも表にして、それぞれのときの費用を全部計算しないとイケないんでしょうか？次の時間はそのことについて考えてみましょう。」</p>	<p>「領域はわかるけど、どこが解かかわからなかった。」「費用のグラフがかけなかった。」</p> <p>「この領域の中に答えがある。」</p> <p>「必要な栄養素の量以上取れるサプリメントの個数の組み合わせを表している。」</p> <p>・表にあるサプリメントの個数の組み合わせを表す点をグラフ上にとる。</p>  <p>「領域の中にある。」「直線の近くにある。」</p> <p>「その点は必要な栄養素の量を満たすけど、個数が多すぎて高くなる。」</p> <p>「サプリメントは条件を満たす中でなるべく少なく買いたい。その方が安くなる。」</p> <p>「だから直線の近くに点があるんだ。」</p>	
<p>2</p>	<p>4. 問題提起②</p> <p>・解決を振り返る。</p> <p>「前は3の方法で解決しましたが、いつも費用を全て計算しないとイケない？」</p> <p>「費用に規則はないかな？規則がわかればもう少し楽に解決できそうですね。」</p>	<p>「表で費用の規則性が見られないから…」</p>	

条件を満たすようにサプリメントを購入するとき、費用にはどんな規則があるだろうか？

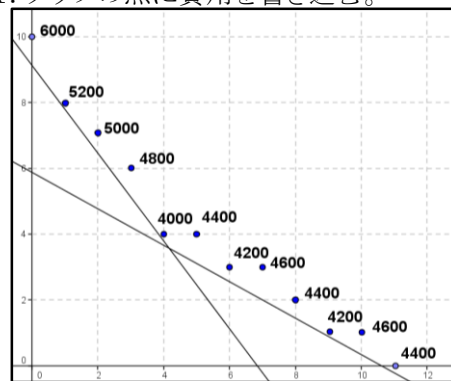
・前時でかいたグラフ、領域、サプリメントの個数を表す点を示す。



「前回、条件の不等式で決まる直線の近くに答えがあるということは分かりましたね。」

4. 自力解決

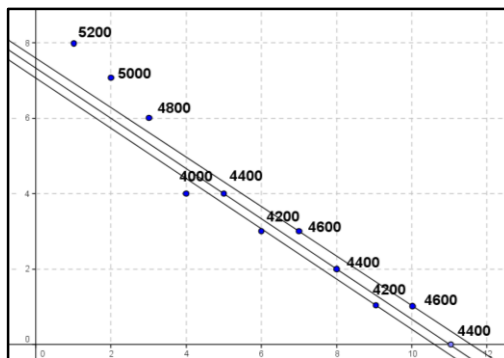
1. グラフの点に費用を書き込む。



「グラフの交点に近いほど安い。」

「直線からの距離が短いほど安い。」

2. 費用を書きこみ、同じ費用の点を直線で結ぶ。



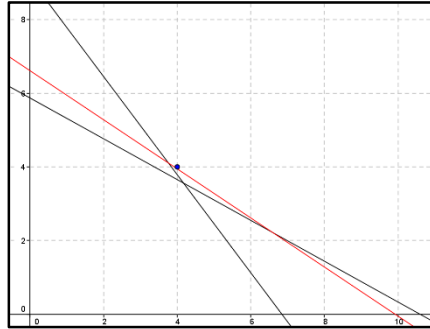
「下にある直線上の費用の方が安い。」

※Geogebra を用いる。

※生徒が同じ金額に着目しない場合は、2番目に安いとき、3番目に安いときはいつかを尋ねて着目させる。

3. 具体的な数値を入れて、グラフをかく。
費用が 4000 円の時、 $400x+600y=4000$ 。

$$\text{よって、} y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$$



他の費用についても直線を引くと、下にある直線の方が、費用が安いときの直線になっている。

4. 「=費用」や「=z」などと置いて費用についての式を考える。

$400x+600y=\text{費用}$ とすると、

$$y = \frac{400}{600}x + \frac{\text{費用}}{600}$$

$$\text{よって、} y = \frac{2}{3}x + \frac{\text{費用}}{600}$$

だから、傾き $\frac{2}{3}$ 、切片 $\frac{\text{費用}}{600}$ の直線になる。

5. 練り上げ

・1の考えを取り上げる。

「本当にそうになっているかな？」

・2と3の考えを取り上げる。

「本当に平行になっていますか？」

「そうは言えない。」

「2と3のかいたグラフは、かき方は違うけど同じグラフだ。」

「同じ費用を結んだ直線が平行になっている。」

「3の式から、どの費用についてのグラフも傾きは $\frac{2}{3}$ だとわかる。」

「だから傾きが等しくて平行になる。」

※2の直観的なグラフと3の式とを関連づける。

・費用についてのグラフを全てかかせる。
 「本当に下にある直線上の費用の方が安くなっていますか？」

「この直線上の、書き込んだ点以外の点は、何を表していますか？」

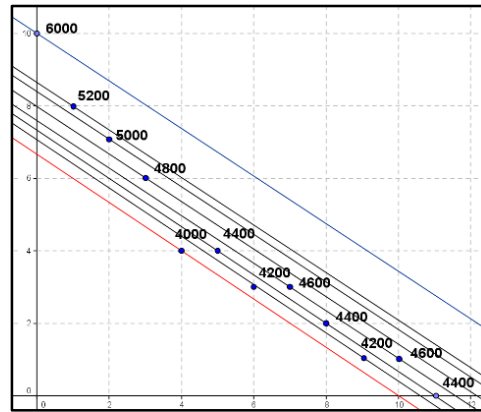
「この直線上には同じ費用の点があって、かつ、それぞれの直線が平行だから、直線を比べることで費用を比べることができるんだね。」

6. まとめ

・4の考えを取り上げ、線形計画法の紹介をする。

「グラフを比べると費用を比べることができることを利用して、領域の中で費用が一番安くなる時を求める方法として、一般的に使われているものに、線形計画法というものがあります。」

「まずはじめに、必要な栄養素の量の条件から領域が求められますね。そして、費用を文字、例えば k と置くと、 $y = \frac{2}{3}x + \frac{k}{600}$ となります。先ほど確認した通り、この式からグラフの傾きが決まりますね。切片が決まらないうけれど、Geogebra のスライダーを使ってグラフをかいてみましょう。」

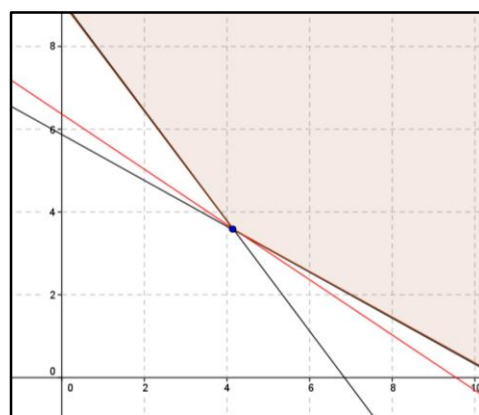


「本当に下に行くほど安くなっている。」

「例えば 4000 を通る直線上の点は、費用が 4000 円になる x と y の組み合わせ。」

「4000 円になる DHC とディアナチュラの個数。」

※費用についてのグラフは全て傾きが等しくなるから、直線を比べることが費用を比べることになる、ということをおさえる。



※Geogebra を使ってグラフをかいたり動かしたりしながら説明する。

このとき、生徒がこれまで取り組んできた活動やわかったことと絡めながら説明するようにして、形

<p>「答えとなる点は領域の中にあるので、グラフは領域を通らなければなりませんね。領域を通るグラフで、一番安い費用のグラフはどれでしょうか。」</p> <p>「これは、費用についてのグラフが、より下にある方が費用は安くなるという、さきほど見つけた規則性ですね。」</p> <p>「今 Geogebra で見てみると、2 つの直線の交点を通るときグラフが一番下にくるので、このとき最も費用が安くなるとわかりました。でもサプリメントは整数個しか買えないので、整数の範囲で見ると、グラフが(4,4)を通るとき一番安くなることがわかりますね。」</p> <p>6. 学習感想</p>	<p>「栄養素の量についての 2 つのグラフの交点。」「交点を通るとき、領域を通るグラフの中で一番下になる。」</p> <p>・第 1 時での疑問の解消について。 「最初は不規則だと思っていた費用の変化のきまりがわかって良かった。」 「グラフで解決できないと思っていたが解決できるとわかってよかった。」</p> <p>・線形計画法の考えについて。 「領域を通るグラフの位置に注目するだけで問題が解決できるのは楽ですごかった。」 「費用がわからないときは文字で置いて考えればいいことが分かった。」</p> <p>・表、式、グラフ、事象を関連づけることについて。 「グラフや領域が何を表しているかを考えることが大切だとわかった。」 「グラフと式を関連づけて考えることで、それぞれの意味がよりよく分かった。」</p> <p>・さらなる疑問や興味。 「この方法は他のどんなときに使えるのか気になる。」</p>	<p>式的な説明だけに ならないようにする。</p>
---	---	--------------------------------