2015/03/04

東京学芸大学附属中高数学教育研究会

研究主題「数学的プロセスの質を高める授業」

第2回公開授業研究会

学習指導案

理解の仕方の質を高める授業

三角関数の合成を円運動で解釈することを通して

東京学芸大学附属高等学校

佐藤亮太

理解の仕方の質を高める授業

三角関数の合成を円運動で解釈することを通して

東京学芸大学附属高等学校
佐藤亮太

日時：2015年3月4日（水）5限13:10～14:00

対象：東京学芸大学附属高等学校　1年F組　42名

単元「三角関数」の指導計画

	時間数	内容
①	1	角の拡張
②	4	三角比の拡張
③	3	三角関数のグラフ
④	3	三角関数のグラフの平行移動，拡大縮小
⑤	2	三角関数を含む方程式・不等式
⑥	2	加法定理
⑦	1	2倍角，半角の公式
⑧	2	三角関数の合成　　←本時はその1時間目

1．本時の授業とその前後の授業について

1.1　前時について

前時の課題　$y=\sin\theta\cos\theta$ のグラフをかこう

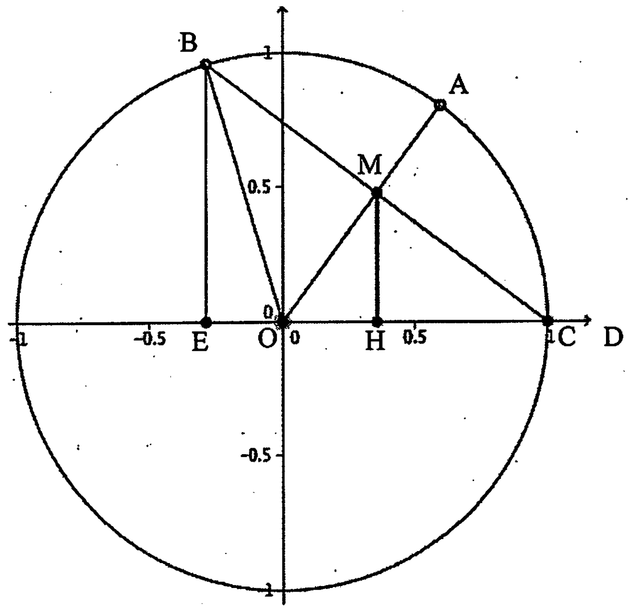
配布プリント①を配り，$y=\sin\theta$ のグラフと $y=\cos\theta$ のグラフを基に，$y=\sin\theta\cos\theta$ のグラフの概形をかいてみる。そして，$y=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ と予想する。予想が正しいことを，加法定理を用いて式において解決する。

$$\text{加法定理より，}\ \frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\sin(\theta+\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta\cos\theta+\cos\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta$$

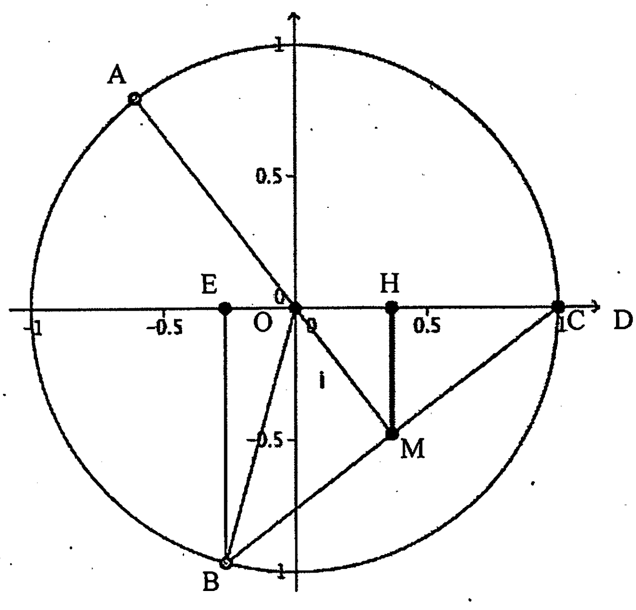
その後，グラフの形が正弦曲線と正弦曲線の積のグラフも正弦曲線であるという不思議な事実を解決するために，$\frac{1}{2}\sin 2\theta$ という形であるので円運動で解釈できるはずであると予想し，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ であることを円運動で解釈することを課題とする。課題解決を通して，$a\sin n\theta$ という形は円運動で解釈できることを経験する。

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ であることを円運動で解釈しよう

※　未解決



角 θ の動径と単位円 O との交点を A とし，点 C から AO へ下ろした垂線の足を M とし，M から x 軸へおろした垂線の足を H とする。OC=1 より CM=$\sin\theta$ であり，∠CMH=θ であるので，MH=CM$\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$。CM を延長し，単位円 O との交点を B とすると，△COB は OC=OB の二等辺三角形であり，OM⊥CM より∠COM=∠MOB=θ であり，また，M は CB の中点である。よって，∠COB=2θ であるので，B から x 軸へおろした垂線の足を E とすると，BE=$\sin 2\theta$ である。M は CB の中点であり，かつ△CMH∽△CBE より，MH=$\frac{1}{2}$BE であるので，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$



1.2 本時について

前時より $y=\sin\theta\cos\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ と変形できることから正弦曲線であることがわかる。2 つの正弦曲線である $y=\sin\theta$ のグラフと $y=\cos\theta$ のグラフの積が，また正弦曲線であるという不思議な事実より，和ではどうなるかという疑問から，$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフを考える。

本時の課題　$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフをかこう

前時に引き続き配布プリント①を利用して，$y=\sin\theta$ のグラフと $y=\cos\theta$ のグラフを利用して，$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフを 15° 刻みにプロットし概形をかき，正弦曲線に見えると予想し，$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ または，$y=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と予想させる。$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ なのかが課題となる。

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ なのか？

加法定理を用いて，式で解決する。おそらく，右辺を変形して左辺の形にする生徒が多いであろう。

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

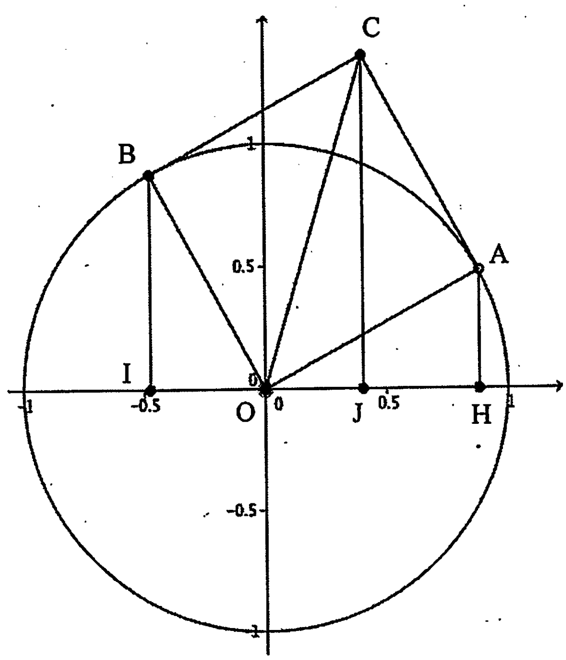
$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であることと，前時の経験から円運動で解釈しようとしてほしい。そこで，以下が課題となる。

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ を円運動で解釈しよう

$\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ とみて，

角 θ の動径と単位円 O との交点を A とし，角 $\theta+\frac{\pi}{2}$ の動径と単位円との交点を B とすると，A の y 座標が $\sin\theta$，B の y 座標が $\cos\theta$ となる。O と A が重なるように OB を平行移動した B の行き先を C とすると，C の y 座標が，$\sin\theta+\cos\theta$ となる。$\triangle$OAC は，等辺の長さが 1 の直角二等辺三角形であるので，OC $=\sqrt{2}$ かつ $\angle$AOC $=\frac{\pi}{4}$。したがって，C の y 座標は，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ でもある。

よって，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ である。



このように$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$を円運動で解釈することにより，$y=\sin\theta$と$y=\cos\theta$の合成を式の変形だけではなく，数値の意味が伴ってくる。具体的には，$\sqrt{2}$や$\dfrac{\pi}{4}$や周期2πや正弦であることの意味がよく分かる。そこで，本授業（前後3時間）を通して，数値の意味が伴っていない式変形で満足することなく，数値の意味が伴った式変形を目指して欲しい。換言すれば，表面上の理解だけでなく深い理解を目指すという，理解の仕方の質を高めることを試みる。そのために，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$を円運動で解釈できるはずという予想をもとに，予想が正しいことを証明させたい。そのために以下の手立てを設定した。

【授業の最初の時点よりも質の高まった「数学的プロセス」】
数値の意味が伴った式変形

授業者による「数学的プロセス」を高めるための手立て

① $a\sin n\theta$を円運動で解釈した経験（前時に解決に至らず）
② $a\sin(\theta+k)$という形は，（半径aの）円運動で解釈できてもよいはずであることを伝える
③ $\cos\theta$を$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$とみた経験を思い出させる
④ 以下のことをしている生徒がいたら指名し，発表してもらう
1. Aからx軸へ垂線をおろしている。（その足をHとする。）
2. AHの上に，OHの長さを足している
3. $\cos\theta$を$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$とみている
4. $\sqrt{2}$の円を考えている
5. 角$\theta+\dfrac{\pi}{4}$の動径を考えている

⑤ 上記のことをしている生徒がいなかった場合，それぞれに対して以下のように言う
1. $\sin\theta$と$\cos\theta$は，この図のどこに表れているだろうか。
2. AHとOHを足したい。足すために同じ向きに揃えたい。どうすればよいですか。
3. 向きを揃えるために，x座標である$\cos\theta$をy座標にしたい。そうした経験今までに何がありましたか。
4. $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ということはどんな大きさの円運動と解釈できてもよいだろうか。
5. $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$の$\dfrac{\pi}{4}$は，この図の中のどこに出てくるだろうか。

⑥ 意味の伴った理解があれば，一般化が容易な場面を与えること（次の時間）

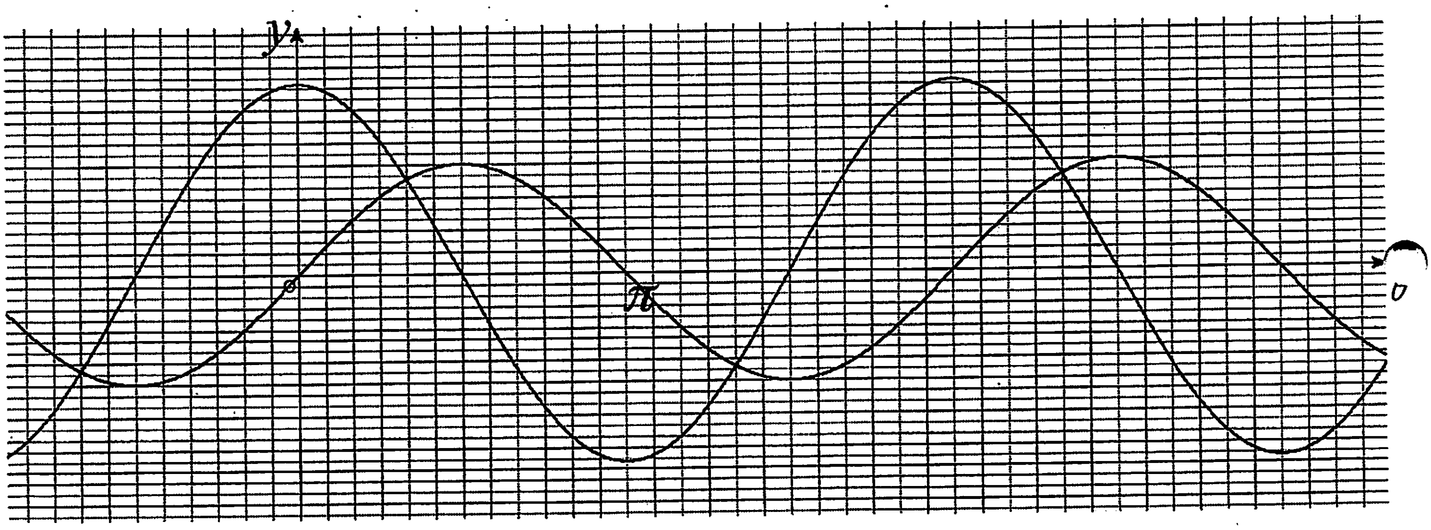
【授業の最初の時点で遂行できると考えられる「数学的プロセス」】
数値の意味が伴わない式変形

1.3　今後の授業について

(1)　$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフをかこう

前時と同様に，配布する以下のプリントを利用して，グラフを予想し，$y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ と予想させ，

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるかどうかを課題とし，式を用いて解決し，円運動で解釈する。



(式)

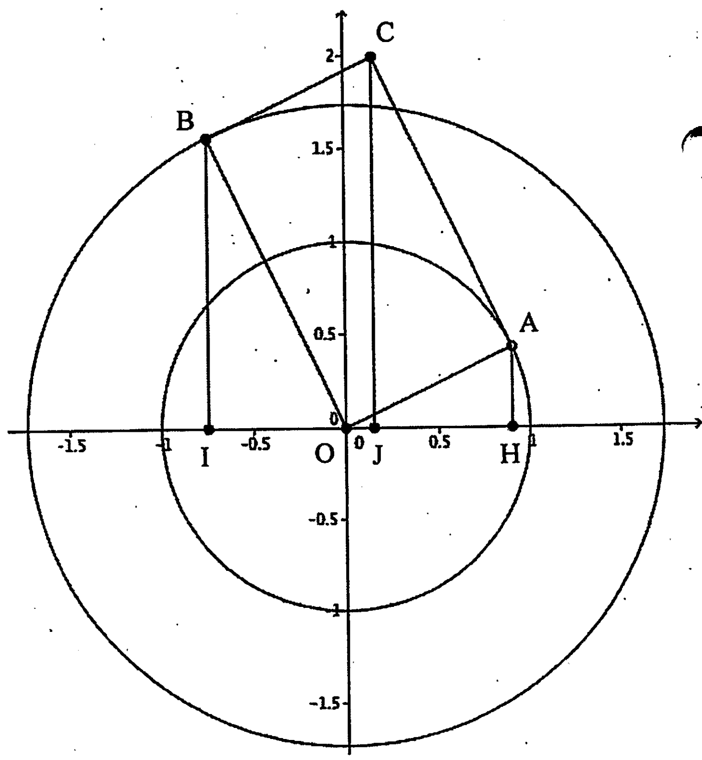
$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

(円運動で解釈)

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sin\theta+\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$ とみて，

角 θ の動径と単位円Oとの交点をAとし，角 $\theta+\frac{\pi}{2}$ の動径と原点を中心とし半径 $\sqrt{3}$ の円との交点をBとすると，Aの y 座標が $\sin\theta$，Bの y 座標が $\sqrt{3}\cos\theta$ となる。OとAが重なるようにOBを平行移動したBの行き先をCとすると，Cの y 座標が，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ となる。△OACは，OA=1，AC=$\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{2}$。の直角三角形であるので，OC=2 かつ $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$。したがって，Cの y 座標は，$2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$ でもある。

よって，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ である。



前の時間でしっかり円運動で解釈できていれば，今回は容易に解釈できるはずである。
円運動で解釈すれば，一般化も容易であることから，数値の意味の伴った理解がよい理解であることをより実感するであろう。したがって，このように数値の意味が伴った理解があれば一般化が容易な場面を与えることも，理解の仕方の質を高める手立ての一つとなると考える（手立て⑥）。

次に，位相を変えてみる。

(2) $y=\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかこう

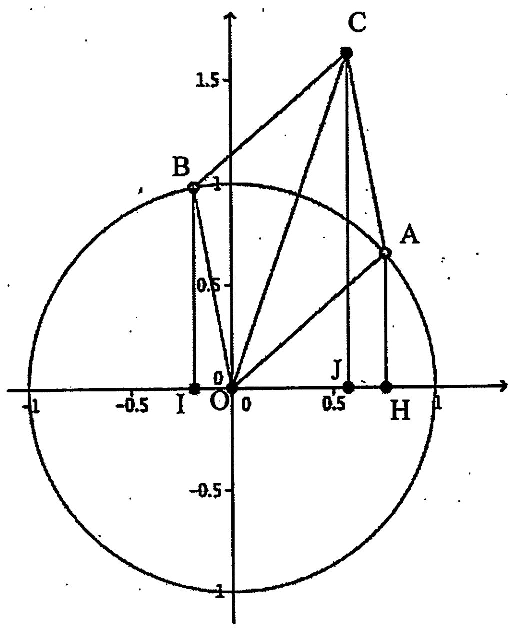
（式）

$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sin\theta+\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

（円運動で解釈）

$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるので，角 θ の動径と単位円 O との交点を A とし，角 $\theta+\frac{\pi}{3}$ の動径と単位円との交点を B とすると，A の y 座標が $\sin\theta$，B の y 座標が $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ となる。四角形 OACB が平行四辺形になるように C をとると，C の y 座標が，$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ となる。△OAC は，OA=1，AC=1，∠A $=\frac{\pi}{3}$ の二等辺三角形であるので，OC $=\sqrt{3}$ かつ∠AOC $=\frac{\pi}{6}$。したがって，C の y 座標は，$\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ でもある。よって，$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ である。



（円運動で解釈②）

$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ として，(1)と同様に解決

1.4 積についての補足

$y=\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは？

（式）

$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$ より，

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\theta-\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)-\cos\left(\theta+\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{6}-\sin\left(2\theta+\frac{5\pi}{6}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

（円運動で解釈）

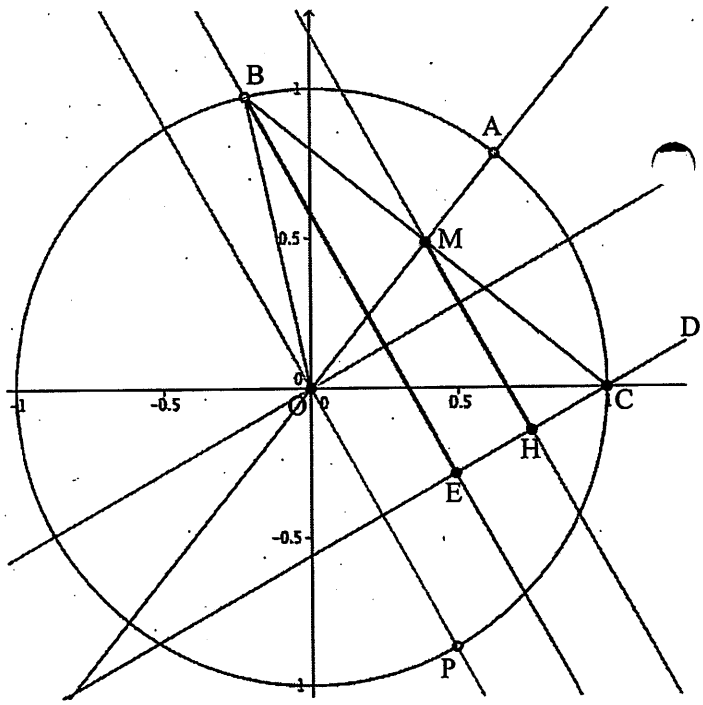
単位円 O と角θ，角2θ，角$-\dfrac{\pi}{3}$の動径との交点をそれぞれ A，B，P とする。$\mathrm{CM}=\sin\theta$ で，

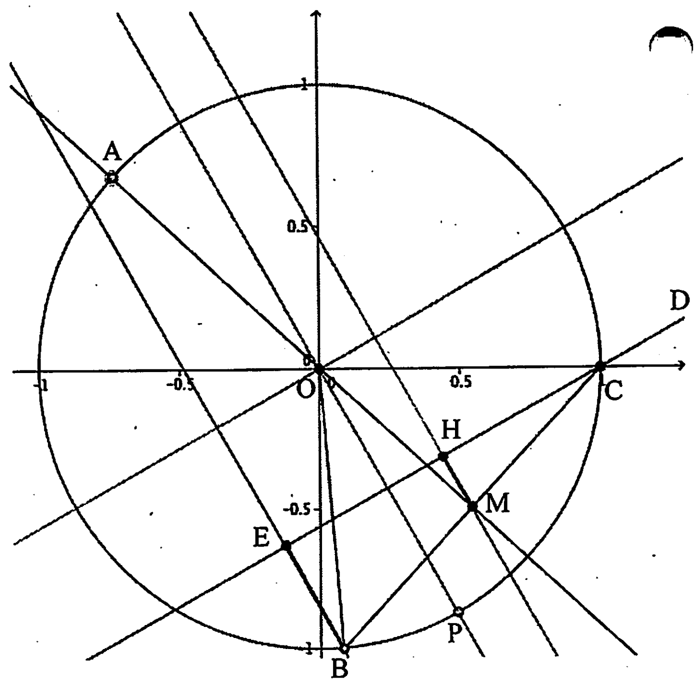
$\angle\mathrm{DCM}\ =\theta+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$ より，

$\mathrm{MH}=\mathrm{CM}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\mathrm{BE}=\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)a\sin(\theta+k)$ で，$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BE}$ より，

$\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$





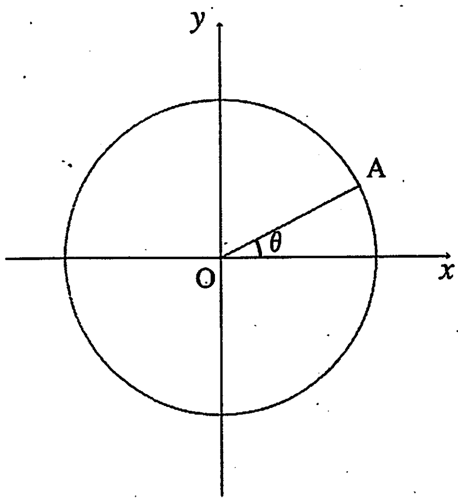
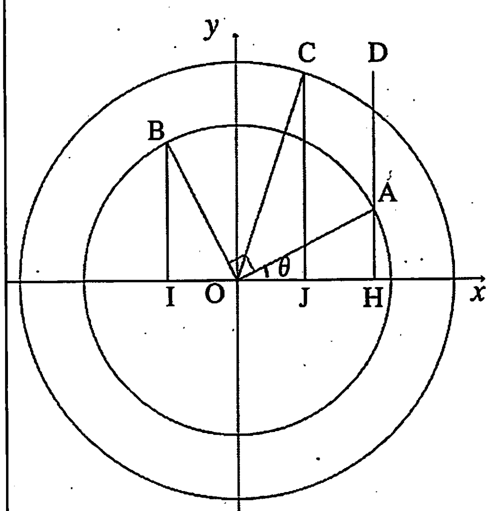
３．本時のねらい

- 三角関数の性質を，円運動と関連付けて解釈しようとしている。
- 数値の意味が伴った式変形を目指し，数値の意味を考えようとする。
- $\sin\theta+\cos\theta$ を $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ と変形できる。
- $a\sin(\theta+k)$ という形は円運動で解釈できることの理解を深める。

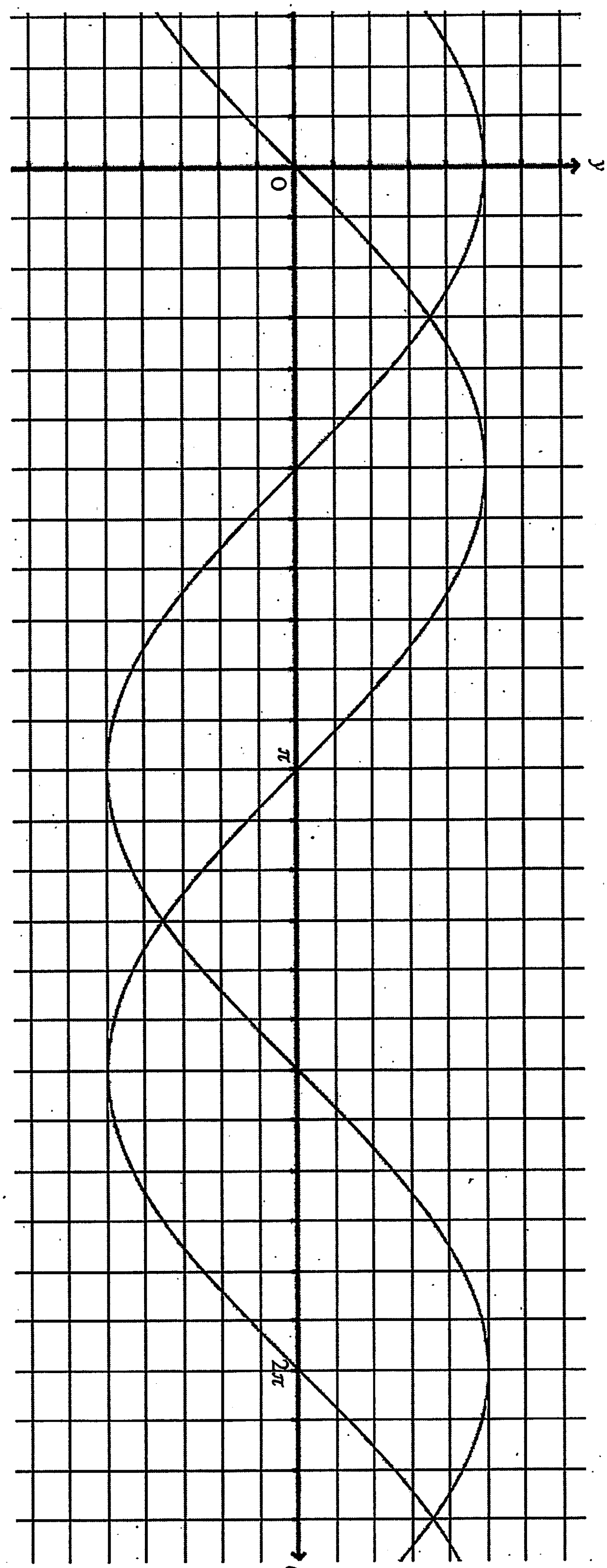
４．本時の展開

分	指導内容と発問	生徒の学習活動	指導上の留意点
0	前回，$y=\sin\theta\cos\theta$ のグラフをかきました。どうなりましたか？ それはなぜでしたか？ 図を用いて，正弦曲線であることを，円運動で解釈しようとして未解決のまま終わりました。 正弦曲線×正弦曲線が正弦曲線でした。	$\frac{1}{2}\sin 2\theta$。正弦曲線。 加法定理。２倍角の公式 図で。	加法定理を復習 手立て① 前時の復習 以下の３点を思い出させる。①グラフをかいたこと；②それを式を用いて解釈したこと；③それを図を用いて円運動で解釈したこと（※未解決）。
3	次にどうしますか？ 今日は，足し算にしてみます。 $y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフは？ （プリント①配布）	割り算 足し算 引き算	
5	このプリントを利用して，$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフの概形をかきましょう。 $\boxed{y=\sin\theta+\cos\theta \text{ のグラフをかこう}}$ （プリントの利用の仕方を説明） 例えば $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき，$\sin\frac{\pi}{6}$ と $\cos\frac{\pi}{6}$ はそれぞれこの長さで表されているので，この２つの長さを足して，プロットする。もう一つ，例えば $\theta=\frac{\pi}{3}$ のときは，これらの長さを足しプロットする。以下同様に，15°刻みにプロットしていってください。大体でよいです。	（作業）	大体でよいことを強調し 時間短縮を促す
15	どうなりましたか？ 驚きですよね。 式は？	正弦曲線っぽい $y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$	

	$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ と $y=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは同じですか？ $\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$ を今までにも使いましたね。余弦の加法定理から正弦の加法定理にするときや，$y=\cos\theta$ のグラフをかくときに $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ とし x 座標を y 座標としてかいたときにも使いました。	$y=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 同じです。 $\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$ だからです。	手立て③ $\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$ を思い出させる。 手立て③ $\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$ で，x 座標を y 座標とした経験を思い出させる
18	$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ なのだろうか？ $\boxed{\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\text{なのか？}}$	（自力解決）	
23		(1)右辺を変形し，左辺へ $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ $=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $=\sin\theta+\cos\theta$ (2)左辺を変形し，右辺へ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$	手立て 式を用いてではなく，図を用いて解釈しようとしている生徒がいたら，発表してもらう
25	式で解決できました。 $\sin\theta+\cos\theta=a\sin(\theta+k)$ となることから， $\sin\theta\cos\theta=a\sin n\theta$ と同様に， $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ も円運動で解釈できてよいはずである。これを円運動で解釈しよう。 （プリント②配布）		手立て② $a\sin(\theta+k)$ という形は，(半径 a の) 円運動で解釈できてもよいはずであることを伝える

30	$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ を円運動で解釈せよ。		
40	発表してもらいましょう   以上をもとに，もう少し考えてみましょう。	生徒の反応 1. A から x 軸へ垂線をおろしている。 2. AH の上に，OH の長さを足している 3. $\cos\theta$ を $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ とみている 4. $\sqrt{2}$ の円を考えている 5. 角 $\theta+\frac{\pi}{4}$ の動径を考えている	手立て④ 左記の生徒がいたら発表してもらう。 手立て⑤ 左記の生徒がいなければ，それぞれに対して以下のように問う 1. $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は，この図のどこに表れているだろうか。 2. AH と OH を足したい。足すために同じ向きに揃えたい。どうすればよいですか。 3. 向きを揃えるために，x 座標である $\cos\theta$ を y 座標にしたい。そうした経験今までに何がありましたか。 4. $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ ということはどんな大きさの円運動と解釈できてもよいだろうか。 5. $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ の $\frac{\pi}{4}$ は，この図の中のどこに出てくるだろうか。
47	解釈できた人いますか。	・四角形 OABC が正方形であることを示す ・△OBI を O と A が重なるように平行移動させると，B と C が一致することを示す	
49	次に何を考えますか。	引き算 他の正弦曲線の和 ・ 係数を変化させる ・ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ の $\frac{\pi}{2}$ を変化させる	

数学Ⅰ　三角関数　2015/03



配布プリント②

数学Ⅰ　三角関数　2015/03