# 電磁気学　レポート課題（出題:2005 年 11 月 7 日）解答

担当教員:新田英雄，レポート担当：永田祐吾，　クラス:理 1 24,25　.

1. 線分 $AB$ に $B$ から $A$ の向きに電流 $I$ が流れているとき、導線からの距離が $R$ で、$\angle PAB = \theta_1$、$\angle PBA = \theta_2$ であるような点 $P$ における磁束密度を求めよ。

（解答例）

Bio-Savart の法則、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1}$$

を用いて求める。$Id\boldsymbol{s}$ は電流素片，$\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{r}'$ はそれぞれ求める磁場および電流素片の位置ベクトルである。

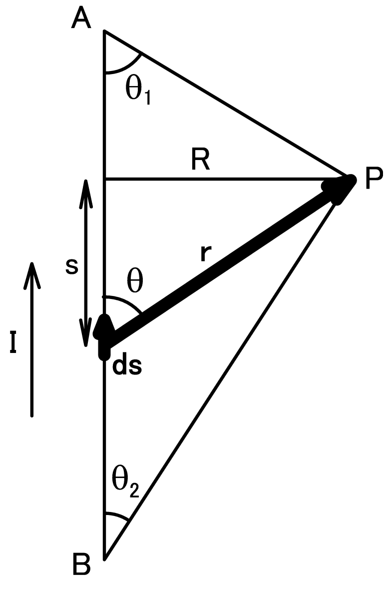


図 1: 電流

ここでは，図 1 のようにパラメタをとって点 P での磁場を求める[1]。図 1 の場合、磁場の方向は紙面に対し垂直であるので、Bio-Savart の法則から磁場の大きさは簡単に、

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{ds\sin\theta}{r^2} \tag{2}$$

と書ける。ここで $s$ から $\theta$ へ変数変換を行う。線分 AB と線分 $R$ との交点を原点とすると、次の関係を得る。

$$\sin\theta = \frac{R}{r} \quad , \quad \cos\theta = -\frac{s}{r} \quad , \quad \tan\theta = -\frac{R}{s} \tag{3}$$

式 (3) の第 3 式の両辺を $\theta$ で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{R}{s^2}\frac{ds}{d\theta} \tag{4}$$

[1] 記法を簡単にするために，$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ を改めて $\boldsymbol{r}$ と取り直してある。このようにとった方が計算が簡単になる場合も多い。

となるので

$$ds = \frac{s^2 d\theta}{R\cos^2\theta} \tag{5}$$

を得る。一方，式 (3) の第 2 式より

$$\cos^2\theta = \left(\frac{s}{r}\right)^2 \tag{6}$$

であるから，これと式 (5) を用いて式 (2) の被積分関数を $R$ と $\theta$ を用いて書き直すと，

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\theta_2}^{\pi-\theta_1} d\theta \sin\theta \qquad (7) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \qquad (8) \end{aligned}$$

となる。磁場の方向は、Bio-Savart の法則の外積の部分を考えると、電流に対して右ねじの向きである。

**コメント**：

「磁場を求めよ」と言われたら，磁場の大きさだけでなく，向きも答えないと「完答」とはならない。

2. 半径 $r$ の円に内接する正 $n$ 角形の回路に電流 $I$ が流れているとき、その中心に生じる磁場 (磁束密度) を求めよ。(1 の結果を用いて良い) また、$n \to \infty$ の極限で、外接円の回路に電流 $I$ が流れる場合になることを示せ。

（解答例）

電流が流れる正 $n$ 角形の一辺からの寄与を考える。問 1 の結果を用いるため図 (2) から $\theta_a$ と $\theta_b$ を求めると、

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{\pi}{n} \qquad (9) \\ \theta_b &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \qquad (10) \end{aligned}$$

となる。$R = r\cos(\pi/n)$ であることを用いて、一辺からの磁場の寄与 $\delta B$ は、

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r \cos\frac{\pi}{n}} 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \qquad (11) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\tan\frac{\pi}{n} \qquad (12) \end{aligned}$$

となる。全磁場は $n$ 倍して

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}\tan\frac{\pi}{n} \tag{13}$$

となる。向きは図 (2) だと、紙面の裏から表の方向である。次に $n \to \infty$ の場合を考える。$\tan(\pi/n)$ を $\pi/n$ でテーラー展開 (マクローリン展開) すると、

$$\tan\frac{\pi}{n} \simeq \frac{\pi}{n} + \frac{2}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \cdots \tag{14}$$

となるので、磁場は

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r}\left[1+\frac{2}{3!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+\cdots\right] \tag{15}$$

と書ける。よって $n\to\infty$ の極限においては、

$$\lim_{n\to\infty} B=\frac{\mu_0 I}{2r} \tag{16}$$

となり、これは円環に流れる電流がその中心に作る磁場と一致する。
**コメント**：Taylor 展開の代わりに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\tan\theta\\ &= \pi\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}\\ &= \pi\left[\frac{d\tan\theta}{d\theta}\right]_{\theta=0}\\ &= \pi\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\right]_{\theta=0}\\ &= \pi \end{aligned} \tag{17}$$

を用いるのも良い。

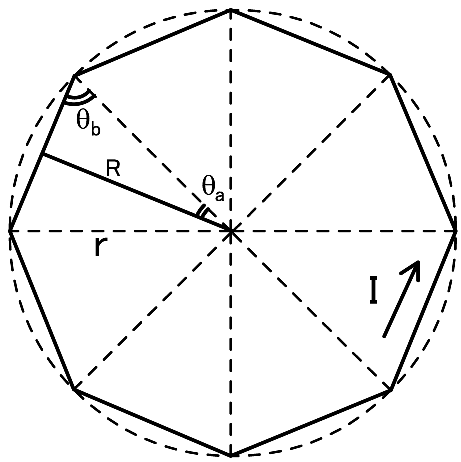


図 2: 正 8 角形の場合

3. $\boldsymbol{A}=(yz,2x^2,y-1)$ のときに、$t$ をパラメータとして $\boldsymbol{r}=(t,t-1,t^2)$ で表される曲線の点 (0,-1,0) から (1,0,1) までを積分経路 $C$ とした線積分

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ。
（解答例）

$\boldsymbol{A}$ は、t を用いて表すと、$(t^3 - t^2, 2t^2, 2t^2 - 4t)$ であり、$d\boldsymbol{r}$ は

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = (1, 1, 2t)dt \tag{18}$$

であるので、線積分は

$$\int_C (t^3 + 3t^2 - 4t)dt \tag{19}$$

となる。積分を (0,-1,0) から (1,0,1) まで行うことは、パラメータ $t$ で考えると 0 から 1 まで積分することであるから、

$$\int_0^1 (t^3 + 3t^2 - 4t)dt = -\frac{3}{4} \tag{20}$$

となる。

**コメント**：

上記の線積分は積分経路 $\boldsymbol{r}$ に沿って、量 $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を積算していくことを意味する。一方，$\boldsymbol{r}$ はパラメタ $t$ の関数であるから，$d\boldsymbol{r} = \lim_{\Delta t \to 0}[\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)]$ という意味になる。つまり、

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \lim_{\Delta t \to 0}[\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right)\Delta t \\
&= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt
\end{aligned}$$

と書ける。もちろん、ベクトルの内積を取っているので、最終結果はスカラーとなる。