1　微分方程式の級数解とは

(以下は、ある学生と教官との会話である [1]。)

「先生，実は級数解の方法って，全然知らないんです．というか，初めて量子力学の本で出会ったのですが，ちんぷんかんぷんだったんです.」

「それはたぶん，量子力学の教科書にある調和振動子や水素原子の問題で，エルミートの微分方程式か，下手をするとルジャンドルの微分方程式もしくはラゲールの微分方程式などという，高級な微分方程式の級数解法にいきなり出会ってしまったからだろう．ここではまず，級数解のココロを見るために最も簡単な微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1}$$

の級数解を求めてみよう．もちろん君たちの頭には，この解が何であるかはすぐに浮かぶだろうが，いまは知らないふりをしておこう．簡単のため解は原点でなめらかな関数だと仮定して，求める解が x のべき級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \tag{2}$$

に書けるとする．これは，要するに原点を中心としてテイラー展開[1]できるようなものが解であると期待しているわけだが，有限な x の値に関して y は発散しないならばこれでよいだろう．

式 (2) を式 (1) に代入すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \tag{3}$$

となる．解を式 (2) のように仮定したため，dy/dx が $(x^n) = nx^{n-1}$ という，最も簡単な微分の計算に還元され，微分方程式が代数方程式に変身したわけだ．つまり，問題は係数（の組）C_n を求めることに変わった．では，式 (3) から C_n を求めよう．第 1 項で $n-1=m$，第 2 項で $n=m$ とおいてまとめると

$$\sum_{m=0}^{\infty} [C_{m+1}(m+1) + C_m] x^m = 0 \tag{4}$$

となる．これが恒等的に成り立つためには (改めて m を n とおいて)

$$C_{n+1}(n+1) + C_n = 0 \tag{5}$$

となならなければならない．これから，C_n を求めるための漸化式

$$C_n = \frac{(-1)}{n} C_{n-1} \tag{6}$$

を得る．これは

$$\begin{aligned} C_n &= \left(\frac{(-1)}{n}\right)\left(\frac{(-1)}{n-1}\right) C_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} C_0 \end{aligned} \tag{7}$$

のように容易に解ける．これを式 (2) に代入して

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_0 x^n = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n \\ &= C_0 \mathrm{e}^{-x} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここで C_0 は，問題に設定される初期条件で決まる．解 (8) はもちろん級数解法でなくても求まるわけだ．だが，今後の量子力学の例題を解いていくときに出会う微分方程式では，指数関数とか三角関数とかの初等関数では表されないもの，すなわち特殊関数が解になる．そのようなときに有効な方法なのだ.」

「級数解法って，どんな微分方程式でも使える方法なのですか.」

「この質問に答えるのはそう簡単ではないね．とりあえず理屈は抜きで，次のことを述べるにとどめよう．二階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{9}$$

を考える．この係数 $P(x)$ または $Q(x)$ は，$x = x_0$ で発散するが，

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x) = \text{有限}, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \text{有限} \tag{11}$$

が成り立つとする．このとき，x_0 は確定特異点という (発散するならば，x_0 は真性特異点という)．確定特異点の場合，式 (9) は確定特異点のまわりで

$$y = (x - x_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{12}$$

の形の級数解を持つ．x_0 が真性特異点のときは，式 (9) は級数解を持たない．特異点以外の点 (正則点) のまわりではいつでも級数解がある．より詳しく知りたければ，微分方程式の本をじっくり勉強しなければならない [2].」

「... 機会があれば，勉強します ...」

[1] 本論では，マクローリン展開を含めて，テイラー展開と呼ぶ.

2 単振動 (調和振動) を表す微分方程式の級数解

では，微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y \tag{13}$$

の級数解を求めてみよう．この式は，

$$\lambda = -\omega^2 \tag{14}$$

とおき，x を時間，y を変位とみなすと，授業で扱った単振動を表す運動方程式になることは容易にわかる．

(13) 式の解として

$$y(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad (C_0 \neq 0) \tag{15}$$

の形をのもの求める．これは，級数解の最低次のべきが x^k であるような解を求める，ということを意味する．微分して

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^{n-1} \tag{16}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2}$$

となるから，これらを式 (13) に代入して

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (k+n)(k+n-1) x^{k+n-2} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{k+n} = 0 \tag{17}$$

を得る．和をまとめると

$$C_0 k(k-1) x^{k-2} + C_1 k(k+1) x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [C_{n+2}(k+n+2)(k+n+1) - \lambda C_n] x^{k+n} = 0 \tag{18}$$

となる．

この x の無限次の多項式が恒等的に成り立つためには，x のべきの係数がすべてゼロになることが必要である．まず最低次のべきの項，すなわち x^{k-2} の係数 $C_0 k(k-1)$ がゼロにならなければならないが，仮定より $C_0 \neq 0$ なので

$$k(k-1) = 0 \tag{19}$$

すなわち $k = 0$ または $k = 1$ であることがわかる．これを，k の値を決めるという意味で，**決定方程式**と呼ぶ．

次に，x^{k-1} の係数を調べよう．式 (18) から

$$C_1 k(k+1) = 0 \tag{20}$$

を得るが，$k = 0$ のときはいつでも成り立つので C_1 は任意，$k = 1$ のときは $C_1 = 0$ でなければならないことがわかる．ここでは $k = 0$ の場合も $C_1 = 0$ としておく[2]．さらに式 (18) から，一般に

$$C_{n+2}(k+n+2)(k+n+1) - \lambda C_n = 0$$

つまり，漸化式

$$C_{n+2} = \frac{\lambda}{(k+n+2)(k+n+1)} C_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

が成り立たなければならない．これはひとつおきの係数の値を与えるから，$n = 2m$ と置き換えて

$$\begin{aligned} & C_{2(m+1)} \\ = \; & \frac{\lambda}{[k+2(m+1)][k+2(m+1)-1]} C_{2m} \\ = \; & \left(\frac{\lambda}{[k+2(m+1)][k+2(m+1)-1]} \right) \\ & \times \left(\frac{\lambda}{[k+2m][k+2m-1]} \right) C_{2(m-1)} \\ = \; & \cdots \\ = \; & \frac{(\lambda)^{m+1}}{[k+2(m+1)] \cdots (k+2)(k+2-1)} C_0 \\ & (m = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{22}$$

を得る．また $C_1 = 0$ であるから，漸化式より $C_1 = C_3 = \cdots = C_{2m+1} = \cdots = 0$ が成り立つ．

以下，まずは $k = 0$ のときの解を考えよう．このとき，級数解は式 (22) で $k = 0$ としたものを式 (15) に代入して

$$y_{k=0}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} x^{2m} = C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^m}{(2m)!} x^{2m} \tag{23}$$

となることがわかる．これは x の偶数べきの和であるから，偶関数である。

次に，$k = 1$ のときを考えよう．この場合の級数解は，(22) 式で今度は $k = 1$ としたものを (15) 式に代

[2] $C_1 \neq 0$ として解を求めても，結局その解は式 (26) に一致することが確かめられる．

入して

$$y_{k=1}(x) = x\sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}x^{2m} = C_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} \tag{24}$$

を得る．今度は奇関数になっていることに注意しよう．

ここで (14) 式の $\lambda = -\omega^2$ を代入すると，式 (24) は

$$\begin{aligned} y_{k=1}(x) &= C_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\omega^2)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} \\ &= \frac{C_0}{\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\omega x)^{2m+1} \end{aligned} \tag{25}$$

となる．この式はサインのテイラー展開になっている．つまり，解は，$C_0/\omega = c_1$，$y_{k=1}(x) = y_1(x)$ とおいて)

$$y_1(x) = c_1\sin(\omega x) \tag{26}$$

であることがわかる．

全く同様な手続きを (23) 式に対して行うと，解 $y_{k=0}(x)$ は

$$y_2(x) = c_2\cos(\omega x) \tag{27}$$

なるコサイン型にまとまることがわかる．

ところで，導出過程から明らかなように，解は $y_{k=0}(x)$ **または** $y_{k=1}(x)$ なのであった．つまり両方を同時に含むもの

$$y(x) = c_1\sin(\omega x) + c_2\cos(\omega x) \tag{28}$$

も解である．また，解が級数解法で全て求まるとするならば，解はこれで尽きている．すなわち (28) 式は一般解を表す．

なお，今の場合，$\sin(\omega x)$ と $\cos(\omega x)$ は 1 次独立な関数である．ある 2 つの関数 $y_1(x), y_2(x)$ が 1 次独立であるとは，(考えている変域における全ての x に対して)

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \longrightarrow c_1 = c_2 = 0 \tag{29}$$

が成立することであるが，三角関数の合成を用いると

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\sin(\omega x) + c_2\cos(\omega x) \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\sin(\omega x + \delta) \end{aligned} \tag{30}$$

(δ はある定数) となるから，全ての x について上式が成立するためには $c_1 = c_2 = 0$ でなければならない．

以上より，単振動に対する微分方程式 (13) に対して

1. 決定方程式より級数解はサインとコサインの 2 種類存在している．
2. サインとコサインは 1 次独立な関数である．
3. 任意の解 (一般解) は上の 1 次独立な 2 関数の定数倍の和 (線形結合という) で表される．

ことが分った．

勿論，ここでの議論は特別な微分方程式に対するかなり制限されたものである．時間がなくなってしまった．より一般的な議論は別の機会にしたい．

参考文献

[1] 新田英雄「物理と特殊関数」(共立出版) (1997)（有馬朗人・大槻義彦編「物理数学 One Point」第 16 巻）
本補助教材は，この文献の内容の一部を授業にあわせて書き直したものである。

[2] 例えば吉田耕作:「常微分方程式の解法」，(岩波全書)