電磁気学補助教材
(新田英雄)

点電荷を取り囲む立方体で Gauss の法則を直接確かめること

積分形の Gauss の法則

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{S\text{ 内部の総電荷}}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

は，静電場の Coulomb の法則から任意の閉曲面 S に対して成立することが証明できる．また，Maxwell 方程式のひとつである，微分形の Gauss の法則

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

を空間積分し，Gauss の定理を適用することによって，数学的に導くこともできる．

しかし，具体例で確認したいのも人情である．点電荷を球面で囲む場合には直ちに確認できるが，それではトートロジー的な気分になってしまう.（なぜなら，そのような積分を考えることから出発して，一般的な形状の曲面さらには複数個の電荷の場合へと Gauss の法則を一般化して確立してきたのだから.）そこで，点電荷を立方体で囲んだ場合を考え，(1) 式が成立することを計算で確認しよう.

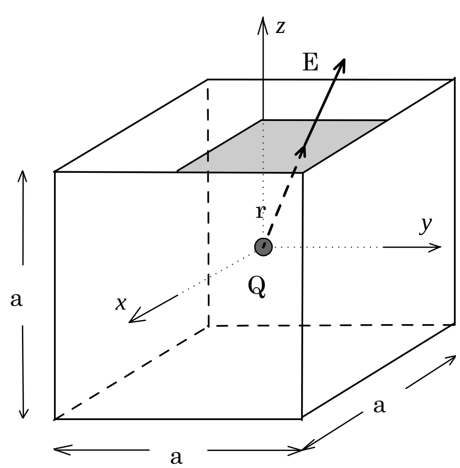

図 1: 原点に点電荷 Q があり，それを対角線の交点とする立方体を S にとる.

図 1 のように立方体をとり，立方体の表面全体 Sc に対して，面積分

$$I_c = \int_{Sc} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{3}$$

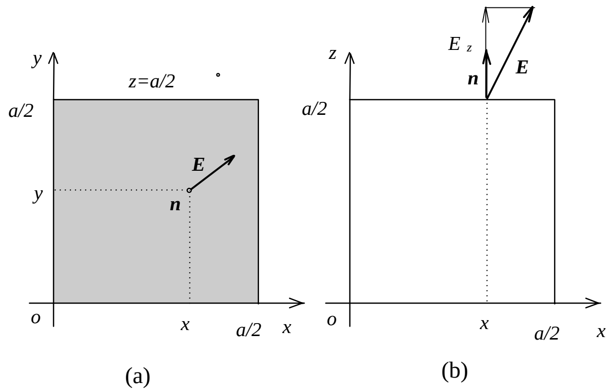

図 2: 立方体を真上と横から見た場合.

を考える．対称性から，この積分の値は，図 1 で斜線を施された面領域 Sr

$$Sr = \left\{ z = \frac{a}{2},\, 0 \le x \le \frac{a}{2},\, 0 \le y \le \frac{a}{2} \right\}$$

の 24 倍となる．Sr の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ なので，電場としては z 成分を考えることになる．すなわち，Sr 上において

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = E_z(x,y,z=a/2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a/2}{[x^2+y^2+(a/2)^2]^{3/2}} \tag{4}$$

であるから，

$$\begin{aligned} I_c/24 &= \int_{Sr} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \\ &= \int_0^{a/2}\int_0^{a/2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a/2}{[x^2+y^2+(a/2)^2]^{3/2}}\, dxdy \end{aligned} \tag{5}$$

を計算することになる．

計算をなるべく分かりやすくするために，無次元化する置き換え

$$X = \frac{x}{a/2},\, Y = \frac{y}{a/2}$$

を施すと，(5) 式は

$$I_c/24 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{[X^2+Y^2+1]^{3/2}}\, dXdY \tag{6}$$

となる．以下，積分

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{[X^2+Y^2+1]^{3/2}}\, dXdY \tag{7}$$

を考える．(7) 式は面積分であるが，置き換えによってもはや面積の次元を持たなくなっていることに注意しよう．一般に複雑な計算は，このように無次

元化してから行った方がよい．色々とわずらわしい要素が減少し，誤りを防ぐことにもつながるからである．

積分 (7) で $Y^2+1=A^2$，$X=A\tan\theta$ とおくと，公式 $1+\tan^2\theta=1/\cos^2\theta$ を利用することにより

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dY \int_0^{\arctan(1/A)} \frac{\cos\theta}{A}\, d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{Y^2+1}\right) \sin\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{Y^2+1}}\right)\right] dY \end{aligned} \tag{8}$$

となる．

Y の積分をするには，適当な置き換えを行う必要がある．ここでは,

$$\frac{1}{Y^2+1} = \cos\phi \tag{9}$$

とおこう．(すぐにこの置き換えを思いついた人は，よほど勉強しているか，運がよいか，天才かの，いずれかである[1]．) この置き換えにより，位相角

$$\alpha \equiv \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{Y^2+1}}\right) \tag{10}$$

に対し $\tan\alpha=\sqrt{\cos\phi}$ となるから，

$$\sin\alpha \equiv \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\cos\phi}}{\sqrt{1+\cos\phi}} \tag{11}$$

となる．また，(9) 式を微分することにより，

$$dY = \frac{\sin\phi}{2\cos^2\phi}\sqrt{\frac{\cos\phi}{1-\cos\phi}}\, d\phi \tag{12}$$

となる．(9),(11),(12) の 3 式を (8) 式に代入すると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/3} \cos\phi \frac{\sqrt{\cos\phi}}{\sqrt{1+\cos\phi}} \frac{\sin\phi}{2\cos^2\phi}\sqrt{\frac{\cos\phi}{1-\cos\phi}}\, d\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}\, d\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} d\phi = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \tag{13}$$

(13) 式を (6) 式に代入して，

$$I_c/24 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{Q}{24\varepsilon_0} \tag{14}$$

すなわち $I_c=Q/\varepsilon_0$ を得る．

(以上)

[1]「置き換え (9) なんか思いつかない！」と嘆くことはない．地道にスタンダードな置き換えを 3 回ほど繰り返していけば，そのうち答えにたどりつけるはずである．