吊り橋の形（自然に吊り下げた糸の形）　懸垂曲線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$

糸をつるす点を(x_0, y_0), $(-x_0, y_0)$とする。糸の微小な長さを ds とすれば，糸全体の位置エネルギーが極小になってつり合う条件は, U を位置エネルギーとして, $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ より,

$$\delta U=\delta\int_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=0 \quad \cdots(1)$$

糸の長さは一定であるから，これをlとすれば, $\int_{-x_0}^{x_0}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$ …(2)

Lagrange の未定乗数法より，(1)+λ(2)'を作り,

$$\delta\int_{-x_0}^{x_0}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx=0$$

この変分の式について，$f(y, y',\lambda)=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$ として，Euler の微分方程式を立てると,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$ より, $$\frac{d}{dx}\left(\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)-\sqrt{1+y'^2}=0$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}$$ であるから,

$$\frac{\{y'^2+(y+\lambda)y''\}\sqrt{1+y'^2}-(y+\lambda)y'\frac{1}{2}2y'\sqrt{1+y'^2}y''}{1+y'^2}=\sqrt{1+y'^2}$$

整理して,

$$\{y'^2+(y+\lambda)y''\}(1+y'^2)-(y+\lambda)y'^2y''=(1+y'^2)^2$$

$$y'^2(1+y'^2)+(y+\lambda)y''=(1+y'^2)^2$$

ここで，$y'=\frac{dy}{dx}=p$,　$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}=p\frac{d}{dy}$ とおくと，$y''=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

$$p^2(1+p^2)+(y+\lambda)p\frac{dp}{dy}=(1+p^2)^2$$

$(y+\lambda)p\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$　より，　$\dfrac{pdp}{1+p^2}=\dfrac{dy}{y+\lambda}$

$\ln|y+\lambda|=\dfrac{1}{2}\ln(1+p^2)+c_1$　よって，　$y+\lambda=c_1\sqrt{1+p^2}$

両辺２乗して，　$\left(\dfrac{y+\lambda}{c_1}\right)^2=1+p^2$　これより，　$p^2=\left(\dfrac{y+\lambda}{c_1}\right)^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c_1}\right)^2-1}$$

$\dfrac{dy}{\sqrt{\left(\dfrac{y+\lambda}{c_1}\right)^2-1}}=\pm dx$　ここで，　$\dfrac{y+\lambda}{c_1}=u$　とおいて，$\dfrac{c_1}{\sqrt{u^2-1}}=dx$

$u+\sqrt{u^2-1}=t$　とおくと，$2tu=t^2+1$

よって，$u=\dfrac{t^2+1}{2t}$　，　$du=\dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$　，　$\sqrt{u^2-1}=t-u=\dfrac{t^2-1}{2t}$　より，

$c_1\int\dfrac{dt}{t}=\int dx$　よって，$c_1\ln|t|=x+c_2$　したがって，$u+\sqrt{u^2-1}=e^{\frac{x+c_2}{c_1}}$

$$u^2-1=e^{2\frac{x+c_2}{c_1}}-2ue^{\frac{x+c_2}{c_1}}+u^2$$

$$2ue^{\frac{x+c_2}{c_1}}=e^{2\frac{x+c_2}{c_1}}+1$$

$\dfrac{y+\lambda}{c_1}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x+c_2}{c_1}}+e^{-\frac{x+c_2}{c_1}}\right)$　より，　$y=\dfrac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x+c_2}{c_1}}+e^{-\frac{x+c_2}{c_1}}\right)-\lambda$

$x=\pm x_0$ で，$y=y_0$ より，$c_2=0$

よって，

$y=\dfrac{c_1}{2}(e^{\frac{x}{c_1}}+e^{-\frac{x}{c_1}})-\lambda=c_1\cosh\dfrac{x}{c_1}-\lambda$　(終)