修士論文要約

学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究
－教科書の問題の分析と評価を中心に－

清 野 辰 彦

本研究の目的は, 教科書の問題は現実と関係ないととらえている生徒の実態を改善するために, 教科書の問題の分析と評価を行い, 数学的モデル化の学習指導に関する一提言を行うものである。このために，生徒の実態と教科書の問題との関連を明らかにするとともに，実態を改善するための指導指針を明確化し，その具現化を図った。本研究の主たる知見は，学校数学における数学的モデル化の学習指導では，「仮定の意識化」が重要であることが明らかにされたことである。

１．修士論文の構成

序章　研究の目的と方法
1 章　数学的モデル化の特徴とその教育的価値
1.1　数学的モデル化に関する用語の整理
1.2　学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する先行研究の検討
1.3 学校数学における数学的モデル化の教育的価値
2 章　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析
2.1　教科書の問題に焦点を当てる意義
2.1.1　数学的モデル化過程における文章題の位置づけ
2.1.2　文章題に対する子どもの考え：三輪の調査
2.1.3　調査から導出された学校数学の問題点
2.1.4　教科書の問題に焦点を当てる意義
2.2　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析
2.2.1　先行研究における教科書の問題の分析の検討
2.2.2　教科書の問題を分析する目的と方法
2.2.3　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析結果
2.2.4　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析結果の考察
3 章　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の評価
3.1　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の役割
3.1.1　子どもの側から「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえる
3.1.2　教師の側から「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえる
3.2　数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の改良
3.2.1　「水槽の問題」の改良とその解決：「風呂の問題」
3.2.2　「水槽の問題」の改良とその解決：「コーヒーメーカーの問題」
終章　研究のまとめと今後の課題

２．研究の目的と方法

数学の学習では，基礎的な知識・技能・考え方の学習は重要である。同時に，数学を学習していくうえでは，数学の有用性や数学が現実世界と関係しているといった数学観を子どもたちに抱かせることも必要であると考える。そこで筆者は，こうした教育的な価値を達成するための一方策として，「現実事象の問題」を対象とする問題解決に焦点をあてた。

「現実事象の問題」を対象とする問題解決は，これまで学校数学においては，数学的モデル化の枠組みで研究されている。そこで，数学的モデル化の研究全体を見渡してみると，ほとんどの研究が教材開発に関する研究である。開発された教材によって，上で述べた教育的な価値が達成されたという報告もなされているが, その質･量ともに十分でないため,

今後も多様な教材が開発される必要がある。しかし，一方で，開発された教材はトピック的な様相が強く，子どもたちにとって最も身近な教材である教科書の問題との関連性が見えてこないという問題が残る。子どもたちの数学観は，最も身近な教材である教科書の問題をどのようにとらえているかと密接に関係すると考えられるため，教科書の問題に対しても価値を見出すことができるようにしていかなければならない。

そこで本研究では,教科書の問題の中でも,特に「応用」「利用」として位置づけられている問題に焦点を当て，教科書の問題は現実と関係ないととらえている子どもたちの実態を改善するために，教科書の問題の分析と評価を行い，教科書の問題を改良することを通して学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する一提言を行うことを目的とする。

この目的のために，まず数学的モデル化に関する用語を整理し，その概念規定をするとともに，数学的モデル化の学習指導に関する先行研究を教授学的三角形を視点にして整理し，その検討を行う。次に，主として三輪の調査を基に，教科書の問題は現実と関係ないととらえている子どもたちの実態をとらえる。そして，その実態と教科書の問題との関連性を明らかにし，具体的な指導指針を明確化する。また，指導指針に基づき，子どもの側から，および教師の側から教科書の問題をとらえ,教科書の問題の役割について明らかにし,教科書の問題の改良をはかる。

３．数学的モデル化の特徴

「現実事象の問題」を数学的に解決するには，まず「現実の世界の関係の薄い細部を，熟慮した上でおしつぶす」(三輪,1982)単純化や理想化を行い，数学的に表現するために数量化・図形化・記号化を行う。こうして定式化されたものを数学的モデルという。モデルの意味は, 次の Pinker(1981)によるモデルの定義に基づいている。

「体系 M がある目的に対して体系 O のモデルであるには, M はその目的に対して O の代用になりうるし，またこの文脈において M の研究は，O にとって意味ある結果を生み出しうる」(p.697)

数学的モデルは，一般的には代数的表現をとっている場合が多い。それは，解を得る段階の数学的作業が形式的に処理できるためである(藤井,1998)。しかし，学校数学において数学的モデルを特徴づける場合，数や式のような代数的表現だけでなく，幾何学的表現をとる数学的モデルを考えることも有益である。例えば，次の例は幾何学的表現をとる数学的モデルを作成することによって幾何学的に解決できてしまう例である(図 1)。「6%の食塩水 80g と 8%の食塩水 50g を混ぜると，何%の食塩水ができるか」(半田,2001)

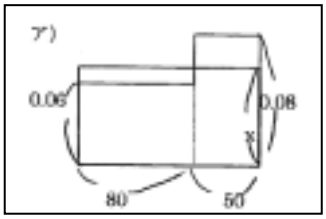


図 1

また，グラフ電卓等のテクノロジーを前提とした場合には，その様相も変わってくる。テクノロジーを用いると，事象を容易にグラフ化できるため，数学的モデルとしては代数的表現だけでなく，グラフィカルな表現をとることが可能となる。これを踏まえると数学的モデルは「数値的表現」「グラフィカルな表現」「代数的表現」(藤井,1998)および幾何

学的な表現をしているという特徴がある。

数学的モデルを得た後は，解を導き出し，その解の意味を解釈する。そして，基となる事象と解とを比較し，評価する。こうした一連の過程は数学的モデル化過程と呼ばれ，数学教育においては，1970 年前後から Pollak(1970)，Burghes and Borrie(1970)らによって明らかにされてきた。

三輪(1982)は，Pollak が述べている数学的モデル化過程を基に，数学的モデル化過程を図式化し，次のように整理した。

「まず，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で，

(1)その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）

(2)定式化した問題を解く（数学的作業）

(3)得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈，評価）

(4)問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）」(図 2)

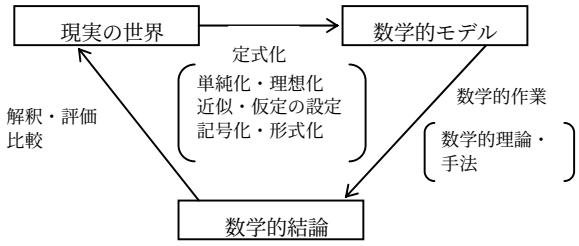


図 2

現在では，多くの研究者によって数学的モデル化過程が定義されている。しかし，本研究では，教科書の問題を数学的モデル化過程に位置づけて考察を行うため，教科書の問題がどこに位置づくのかを顕著に示す必要がある。したがって，「現実事象の問題」と「数学的モデル」の間に段階が存在しない三輪の数学的モデル化過程を用いることにする。

４．数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析

(１)教科書の問題に焦点を当てる意義

本研究では，教科書の問題の中でも，特に「応用」「利用」として位置づけられている問題に焦点をあて分析を行う。そこで，まずこうした問題と深く関わっている文章題の位置づけを考察する。

① 文章題の位置づけ

文章題は，単に「文章に書かれた問題」という意味ではない。川口(1970)によれば文章題は，問題を生み出している（生活の）場を伴っている必要があるという。こうした文章題の定義は次の「問題」に対する川口の考え(1957)が背後にある。「問題は，たとえ，それがどのような種類のものであっても，その問題に付随していたり，或はその問題を生み出している場というものがあるはずである」(p.52)。川口は「問題解決における「場」の理論」において，この「場」の概念を「問題解決に必要な素材の母体であり，解決の必要に迫る迫力性を生み出しているもの」(p.52)と規定していると共に，「場」の自由度という概念を取りあげている。「場」の自由度では，問題解決を行うのに必要な資料が全て「場」に備わっており，問題はその資料に対してどのような数学的処理をすればよいのかという判断と実行とが求められているだけのものを自由度が一次の「第一次構造の場」と呼んでいる。

また，問題を構成するために「場」にある条件を設定し，その条件のもと解決するために不足している資料を収集するといった活動が必要となるようなものを「第二次構造の場」と呼んでいる。こうした「場」の概念および

「場」の自由度を基に文章題をとらえてみると, その位置づけがある側面から見えてくる。「場」を伴う文章題は「現実の世界」と「数学的モデル」の間に存在しており，「場」の自由度によって，「現実の世界」の側に位置づくのか，「数学的モデル」の側に位置づくのかが変化するものととらえることができる。

すると，文章題を作成する際にも，「場」を有意義なものにする試みがなされる。これに関して, 川口は次のように述べている。「この努力は，大まかないい方で，二つの方向に向かってなされているといえる。その一つは場のないところへ，できるだけ有意義な場を下ろそうとする努力であり，他の一つは複雑な「場」を学習に適した場に理想化しようとする努力である」(p.65)。換言すれば，1 つの方向は，学習させたい数学的内容に現実事象の衣を着せて「場」を設定する方向である。そしてもう 1 つの方向は,「現実事象の問題」を定式化していくなかで，その問題に含まれる数学的な内容を特定し，「場」を設定する方向である(図 3)。

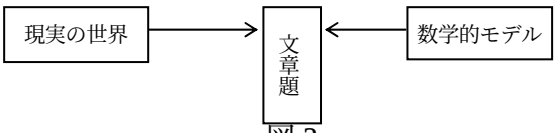


図 3

いずれの方向から作成されたとしても，子どもの側から文章題を見た場合に，その文章題が「解決の必要に迫る迫力性を生み出しているもの」であるのかを常に考慮する必要があると考えられる。

②文章題に対する子どもの考え：三輪の調査

では，文章題を子どもたちはどのようにとらえているのであろうか。三輪(1986.a)は興味ある調査を行っている。この調査は，1984 年に三輪が高校生に対して行った数学的モデル化の教授実験に基づいて行われたものである。教授実験では，何人かの生徒が「現実事象は余りにも多くの考慮に入れるべき要因があって，それに到達することができないし，たとえ仮定を作り上げて考察していったとしても，それは実際の状況から重要性を奪い去ってしまうのではないか」と数学的モデル化に対して不安を感じていた。それを受けこの調査では数学的問題解決において，生徒が仮定を意識しているのかどうか，また文章題が現実世界の状況であると仮定されたならその解が適していると答えるのかどうかについての実態を明らかにしている。以下では，調査対象, 調査問題, 調査結果を順に示していく。

<u>調査対象</u>

筑波大学付属小学校の 6 年生，付属中学校の 1.2.3 年生，付属高等学校の 1.2.3 年生，計約 280 人および中学校・高等学校の教師を志している筑波大学の学生，約 40 名。

<u>調査問題</u>

(1)A さんは 20 日間である仕事を終わらせる。また B さんはその仕事を 30 日間で終わらせる。もし A さんと B さんがこの仕事を一緒に取り組んだなら，それを終わらすのに何日かかるかでしょう？(仕事算)

(2)A さんは 20 分で池の周りを一周する。B さんは 30 分でその池の周りを一周する。もし彼らが，同じ地点から反対方向に同時に出発したなら，A さんと B さんはいつ再び出会うでしょうか？(出会い算)

質問

(ⅰ)両方の問題を解きなさい。

(ⅱ)この両方の問題が現実世界の状況であると仮定し，あなたが問題を解いた際に用いた仮定を書きなさい。

(ⅲ)もし問題が現実世界の状況であると仮定されるなら，あなたの解は適していると思いますか？それとも適してないと思いますか？(これは中学校の生徒だけを対象としている。)

<u>調査結果</u>

(ⅱ)(出会い算のみ)・(ⅲ)の結果を記述する。

(ⅱ)の調査結果(出会い算)

学年	人数	一様性	周囲状況	解法	無回答
6 年	37	21(57%)	1(3%)	11(30%)	1(1)
7 年	41	35(85%)	2(5%)	3(7%)	2(0)
8 年	39	30(77%)	5(13%)	2(5%)	3(1)

9 年	38	34(89%)	7(18%)	1(3%)	1(0)
10 年	43	31(72%)	7(16%)	3(7%)	2(1)
11 年	43	36(84%)	21(49%)	0(0%)	2(0)
12 年	34	31(91%)	6(18%)	3(9%)	0(0)
大学	44	32(73%)	6(14%)	3(7%)	3(1)
平均		79%	17%	9%	

(iii)の調査結果

学年	人数	出会い算		仕事算	
		適する	適さない	適する	適さない
7 年	41	6(15%)	33(87%)	8(20%)	33(80%)
8 年	39	7(18%)	31(79%)	1(3%)	38(97%)
9 年	38	5(13%)	33(87%)	2(5%)	36(95%)
平均		15%	84%	8%	91%

(一様性は，A さんと B さんのスピードに関連したものである。また，周囲状況は，A さんと B さんが歩く池の周りの道の状態に関連している)

三輪の調査によって明らかにされた実態をまとめると次のように記述できる。

・子どもたちは，問題文中に記述されている数値等に関する仮定は意識することができる。しかし，問題文中に記述されていない仮定に対しては意識が薄い。

・子どもたちは，文章題の解を現実世界に戻しても適さないと考えている。つまりモデルの意味と重要性を認識していない。

この調査では，子どもたちが「数学の問題は数学的な世界にのみ存在しているととらえており，それらは現実とは関係ないもの，架空のもの」と考えていることが明らかにされた。こうした子どもたちの数学観は村上(1993)の研究の中にも見出すことができる。

子どもたちの実態，および数学的モデル化の教授実験（三輪.1984）において見出された「「現実事象の問題」を数学的に解決する際の生徒の不安」を考慮すると，学校数学における問題点として次の 2 点をあげることができる。

Ⅰ.子どもたちは，仮定は特定できるが「仮定を設定する価値」を感得していない。

Ⅱ.子どもたちは，学校数学で扱う文章題を「現実の世界」と無関係であり，作りものであるととらえている(図 4)。

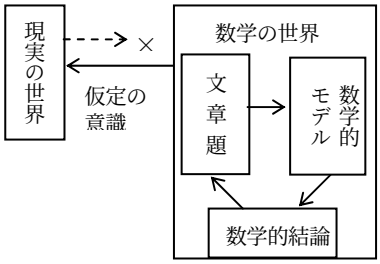


図 4

Ⅱの問題点は，単に文章題に対する観念から導かれるものではなく，子どもたちにとって最も身近な教材である教科書の問題に対する観念から導かれるものであると考えられる。そこで，こうした観念を変えていくために，次の内容を理解させることを目標にする。

「教科書の問題は定式化されたものである」

教科書の問題を様々な仮定が設定され，定式化されたものであるととらえられれば，その解は意味をもつという意識を抱くことができると考える。本研究は，この内容を理解させるために，どのような指導を行えばよいのかについて考察することを意図している。また，この考察を通してⅠの課題の解決を試みる。こうした課題を解決するために，教科書の問題に焦点をあてて考察する。

(２)数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の分析

まず，(1)で特徴づけられる子どもたちの実態と教科書の問題との関連を見出すために，教科書の問題の実態を明らかにする。そこで，次の 2 つの視点から教科書の問題を分析する。1 つめの視点は，子どもにとって教科書の問題場面が「解決の必要に迫る迫力性を生み出している」かどうかに関する視点である。

問題場面に着目し，教科書の問題を分析している先行研究として久保ら(1994)の研究が

あげられる。この研究では，まず「課題学習のあり方を考察する」という目的のもと，課題学習が可能な部分を「問題場面」に着目し，5 つのカテゴリーに分類している。その 1 つが「日常社会」というカテゴリーである。さらにこのカテゴリーが「(ア).実際的（現実世界での問題），(イ).数学的（数学の問題であるが，現実世界の言葉で表現されている）」の 2 つに分けられ，分析されている。この視点は，(1)の①で取りあげた有意義な「場」を設定する際の２つの方向に類似している。この視点は，子どもにとって教科書の問題場面が「解決の必要に迫る迫力性を生み出している」かどうかを見出すためには，参考になる。

本研究では，この視点を問題場面の reality として特徴づける。また，教科書の問題の特徴を詳細に見出すために，次の 4 つの視点を設定する。

A：問題場面が reality のある問題

B：問題場面は reality があるが，解決すべき問題がはっきりしていない問題

C：問題場面に reality をもたせようとするが，不自然な問題になった数学世界の問題

D：問題場面に reality がない数学世界の問題

２つめの視点は，教科書の問題を解決する際，どのような段階を踏むのかを表す数学的モデル化過程の段階による分類である。

数学的モデル化過程の段階に着目し，教科書の問題を分析している先行研究として久保ら(2001)の研究があげられる。この研究では，教科書の問題を「B.社会の問題を数学的に解決するのに必要な力」という視点，具体的には「B1.社会の現象を数学の対象に変える」「B2.対象を数学的に処理する」「B3.社会に照らして検証する」という視点で分類している。この視点は，それぞれ B1：「定式化」，B2：「数学的作業」，B3：「解釈・評価・比較」に相当しており，数学的モデル化過程の段階を視点とした分類ととらえることができる。しかし，分類された典型例を見てみると本研究の分類と異なっていることに気がつく。例えば久保らは，「…。姉は休まずに一定の速さで走ったとすると…」を B1：「仮定をおく」に分類し，「…〔表〕…。海抜 750m の山頂の気圧は何 hPa と考えられますか。」を B3：「予測・推測する」に分類している。

はじめの「一定の速さで走ったとすると」という仮定は，問題解決者が自らおいた仮定ではなく，問題作成者が既においている仮定である。よって本研究では，この問題は B2：「数学的作業」に分類される。また，「上空での…」の問題は，問題に与えられている気圧と高さの表の数値に着目してみると，気圧差が 23 のところもあれば，24 のところもあるため気圧差が一定であるといった仮定を問題解決者がおいて解決する問題である。よって本研究では，B1：「定式化」に分類される。つまり，久保らの視点と本研究の視点と一見同じように見えるが異なったものといえる。

本研究では，問題解決者が教科書の問題を解決する際に辿っていく段階を明らかにしたいため，次の視点を設ける。

①定式化，②形式化，③数学的作業，④解釈・評価・比較（ここで言う定式化とは，数量化・単純化・理想化をさし，形式化は，数量化・図形化・記号化をさす）

分析の対象は，平成 13 年度において使用頻度が高い中学校の 2 社の教科書(以下，A 社，B 社とする)であり，また，教科書の中でも「応用」「利用」といった内容に関連した問題で

ある。これは，「応用」「利用」に絞ることによって，現実世界に関連した用語が含まれている問題の特徴を明らかにすることができると考えたからである。また，三輪(1986.b)が指摘するように「応用問題は，数学内容がすぐに適用される形まで洗練されていて，応用とはいいながら，事象はてんぷらの衣に過ぎなくて，実際は数学内容そのものである」という実態を示すためでもある。分析する際の最小単位は大問である。分析する手順としては，２社のすべての対象問題に対して２人がともに行い, 分類が一致しなかったものは, 合議のうえいずれかに分類した。

分析の結果，A 社・B 社とも A が最も多いことが見出された。実際，A 社では，A の割合が全体の約 64%であり，B 社では，全体の約 51%であった。また，全体的な傾向としては, A 社･B 社とも同様の傾向を示していた。

	A	B	C	D
A 社	85	14	15	18
B 社	54	12	20	19

図 5

さらに，視点 2 では，①が含まれている問題は 6 問あり, 全体の問題数 237 問における①の問題数の割合は，2.5%であった。

A（問題場面が reality のある問題）が多いということは, 教科書の問題が「現実の世界」の側から作成されたものなのか，「数学的モデル」の側から作成されたものなのかはわからないが, reality のある問題として位置づいているととらえることができる。すると,「学校数学で扱う教科書の問題が現実の世界と無関係であり，作りものである」ととらえている子どもたちの実態は，教科書における問題の reality だけに起因するものではないと考えられる。そこで，A に相当する問題を解決する際には，どういった段階を辿っているのかに目を向けてみると，視点 2.数学的モデル化過程の段階による分類で明らかにされたように，そのほとんどが定式化を辿っていないことがわかった。このことが，子どもたちの実態の原因の 1 つと考えられる。よって，筆者は数学的モデル化過程において，定式化を強調する必要があると考えた。しかし，これは単に定式化を行う必要がある問題を子どもたちに与えることだけを意味しているわけではない。定式化を行う際に「仮定をおいて考える」という考え方を子どもたちに身に付けさせることが必要であろう。現状としては, 教科書の問題には，定式化の過程を辿る問題が少ないため，教科書の問題を用い，直接的に「仮定をおいて考える」といった考え方を育成することは難しいと思われる。そこで, どのような仮定がおかれているのかを考えさせることでこの考え方を育成していこうと考えるのである。これは，「仮定の意識化」といえよう。

５．数学的モデル化の視点からとらえた教科書の問題の評価

4 においては，子どもたちの実態を改善するためには，「仮定の意識化」が必要かつ重要であることを教科書の分析から見出した。これを受け 5 では，「仮定の意識化」という視点で子どもの側から，および教師の側から教科書の問題をとらえ，教科書の問題の役割について明らかにする。そして，その役割を基にして，教科書の問題の改良を行う。

(１) 子どもの側から「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえる

まず，子どもの側から「仮定の意識化」を行うとは，何をすることなのかを数学的モデル化過程図を用いて表す（図６）。

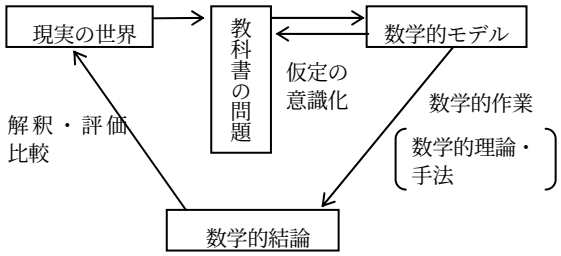


図 6

これは，表立って設定されている仮定や暗黙裡に設定されている仮定を子どもたちに意識させることを意味している。例えば，暗黙裡に設定されている仮定を意識させるとは，4(2)で示した三輪の調査問題(出会い算)であれば，「人は必ずしも一定の時間で池の周りを歩くとは限らない。1km 以上のスピードが時間ごとに変化するであろう。…私は A と B の平均スピードを利用することでこの問題を解決するであろう（6 学年）」といったように，問題を解決するなかで当然のことと見なされていて，明示されなかった仮定を意識させることになる。教科書の問題には多くの仮定が設定されているが，解決する際，ほとんどが取り上げられてこなかった。

島田(1991)，三輪(1986.a)，Pinker(1981)は，暗黙裡に設定されている仮定を意識させることに対して次のような意見を述べている。三輪は「もし我々が数学的モデルの重要性や仮定について意識させないなら，彼等は数学の力をほとんど信頼できなくなるかもしれない」と述べ，島田は，「従来ある典型的な応用例では，基礎にある仮説は暗黙裡に認める当然のこととみなし，仮定的なものとは意識されなかった。そのため数学の問題は現実離れしているという感をまぬかれなかった」と述べ，仮定を意識させなかったことが数学の問題を現実と乖離させて考えてしまうことにつながっているという。また Pinker は「科学的モデリングに対する意味のある準備として役立つであろう」と述べている。

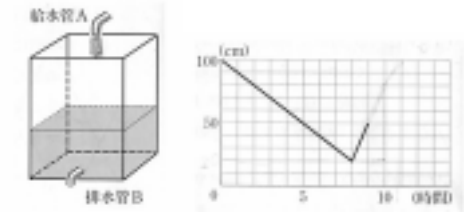
これらを総括すると，「仮定の意識化」は学校数学で扱う教科書の問題と現実の世界との架け橋の役割があり，「学校数学で扱う教科書の問題が現実の世界と無関係であり，作りものである」ととらえている子どもたちの実態を改善するためには必要である。また，数学的モデル化に関わる考え方を育成する上で，重要であるといえる。

（２）教師の側から「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえる

①教科書の問題を改良する視点

教師の側から「仮定の意識化」を行うとは，図 6 において「教科書の問題」から「現実の世界」に向かう矢印に相当する。では，具体的な問題ではどうなるのであろうか。

下のような，深さ１mの直方体の水槽がある。この水槽では，Aの管からは一定の割合で水が給水され，Bの管からは一定の割合で水が排水される。また，管の開閉は次の①～③の順序で繰り返されている。
①水槽が満水なると，Aが閉じ，Bからの排水だけが行われる。
②Bからの排水で水の深さが 20cm になると，B が閉じ，同時に A が開いて給水が行われる。
③A からの給水で水の深さが 80cm になると，B も開き，給水と排水が同時に行われる。
右のグラフは，水槽の水の深さの変化を途中まで示したものである。満水の状態から，次に満水になるまで何時間かかりますか。



まずこの問題に設定されている仮定を取りあげる。そして，この仮定を変更可能なものとして動的にとらえ,変更した場合を考える。

例えば「一定の割合で水が排水される」という仮定であれば，「一定ではない割合で水が排水される」という仮定が考えられる。実際に，こうした仮定が設定されている問題が教科書の中にある。それは次の問題である。

断面積 Acm^2 の円柱形の水槽の底にある面積 acm^2 の小さな穴から水が流出している。水の深さが hcm のとき流出する水の速さは $\sqrt{2gh}cm/$秒 であるとする。深さ $h_0$cm まであった水が全部流出するまでの時間を求めよ。ただし，g は正の定数である。

はじめに取り上げた「水槽の問題」は排水される割合が一定であるのに対して，この問題は水の深さに依存している。つまり，2 つの問題は，2 種類の仮定が設定されているモデルととらえることができる。

こうした活動を総括すると，教師の側から「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえることは，散在する教科書の問題を「設定されている仮定はなんであろうか」といった眼で見直して仮定を洗い出すことであり，仮定は変更されているが，問題の本質が変わらない問題群を見出す活動ととらえることができる。また，こうした活動によって，教科書の問題を改良する視点を見出すことができると考えられる。

② 教科書の問題の改良

本研究では，①で取りあげた「水槽の問題」を「仮定の意識化」の視点でとらえ，数学的モデル化教材の改良者の立場から次のⅠ，Ⅱの観点で見直し，改良した。

Ⅰ.妥当な現実場面が設定されているか。

Ⅱ.この問題は解決するための明確な目的を持ち合わせているか。

改良した問題は「風呂の問題」と「コーヒーメーカーの問題」である。（なお，この問題は，中学校 2 年生から，高校 3 年生までを視野に入れて改良したものである）。また，さらにⅢの観点で改良された問題を見直した。

Ⅲ.この問題に含まれている数学的内容が豊かであるか。

「風呂の問題」

温泉旅館の主人であるあなたは，毎日お風呂場の浴槽を掃除し，そしてお湯を溜める仕事をします。温泉のお湯は地球の恵みの 1 つでもあり，常時流れ出ているため，浴槽にきれいなお湯を溜めておくことができます。しかし，給水される量と排水される量とをうまく調節しなければ，浴槽にお湯が足りなくなったり，お風呂場が水浸しになったりしてしまいます。

そこで，お湯の水面を一定の高さに保つにはどうしたらよいか考えてみましょう。

家庭の風呂のデータを用いて考えてみよう。

風呂を観察することで，次のようなデータが得られた。

① 給水に関するデータ

底からの高さh(cm)			0	5	10
経過時間 t(秒)			0	36	71
15	20	25	30	35	40
108	146	183	219	256	295

② 風呂に関するデータ

縦 70cm，横 60cm，高さ 60cm をもつ，ほぼ直方体の形をした風呂

③ 排水に関するデータ

底までの高さh(cm)			40	36	32
経過時間 t(秒)			7	21	35.2
28	24	20		16	12
51.1	67.2	85.1		105.1	125.3
8	4	2			
148.1	175.1	191.1			

問 お湯の水面を一定の高さに保つにはどうしたらよいか考えてみましょう。

「コーヒーメーカーの問題」

コーヒーメーカーを観察することで，次のようなデータが得られた。

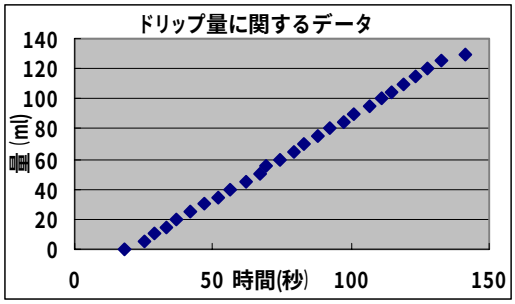
①注入量に関するデータ

・約 3 分で 240ml ・約 1 秒間隔でお湯が注入されている（離散）

②フィルターに関するデータ

・フィルターを真上から見ると，円になっている。その円の半径は 3.5cm ・フィルターの高さは 5cm

③ドリップ量に関するデータ



問　これらのデータをもとに、このコーヒーメーカーのフィルターでの水面が一定に保たれるかどうかを予想しなさい。

６．研究のまとめと今後の課題

本研究の主たる知見は，学校数学における数学的モデル化の学習指導では，「仮定の意識化」が重要であることが明らかにされたことである。「仮定の意識化」の視点で教科書の問題をとらえることにより，子どもの側からは「学校数学で扱う教科書の問題が現実の世界と無関係であり，作りものである」ととらえている子どもたちの実態を改善させることが期待できること，数学的モデル化に対する素地を養うことが期待できる。そして，教師の側からは，教科書の問題を改良する視点が顕在化されることが期待できる。本研究では，実際に「水槽の問題」の分析を行い，その改良を行った。「仮定の意識化」の視点で教科書の問題の分析と評価を行い，教科書の問題を改良することは，数学の有用性を子どもたちに感得させるための１つの重要な指導指針を示しているといえよう。

本研究は，学校数学における数学的モデル化の学習指導のなかで，教科書の問題の分析と評価を中心に行った。今後，学校数学における数学的モデル化の学習指導全体を「仮定の意識化」という視点で構築していくことが課題である。

引用・参考文献

1.三輪辰郎(1982)「モデル化」『現代教育学の基礎』筑波大学教育学研究会編 ぎょうせい pp.286-289
2.Aron Pinker (1981) The concept 'model' and its potential role in mathematics education. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology Vol.12 No.6 pp.693-707
3.藤井斉亮(1998)「事象のグラフ化を活用した教材事例の検討」『高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究（杉山吉茂（研究代表））科学研究補助金研究成果報告書 課題番号08308014』 pp.5-24
4.半田進(2001)「数学科教科教育法指導のための教材例ー学生の学力低下にどのように対応するかー」日本教材学会　配布資料
5.H.O.Pollak (1970) Applications of Mathematics. Mathematics Education 69th Yearbook of the National Society for the Study of Education, University of Chicago Press, pp.311-334
6. D.N.Burghes and M.S.Borrie (1978) Mathematical modeling. Conference on Co-operation between Science Teachers and Mathematics Teachers, pp.1-42
7.川口廷(1970)『算数教育現代化全書 9 問題解決』金子書房
8.川口廷(1957)「算数科における問題解決学習と系統学習ー問題解決学習か系統学習かー」『算数科の教育心理』金子書房
9.T.Miwa (1986.a) Mathematical Model Making in Problem Solving—Japanese Pupils'Performance and Awareness of Assumptions. Proceedings of the U.S-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving Jerry P.Becker and M.Tatsuro, pp.401-417
10.T.Miwa (1984) Mathematical modeling in school mathematics. Proceedings of ICMI-JSME Regional Conference on Mathematical Education, pp.325-329
11.村上豊(1993)「生徒の数学的問題解決にあらわれる「現実の認識」と「数学の認識」」学芸大数学教育研究 第 5 号 pp.101-112
12.久保良宏.久永靖史.　元新一郎.長崎栄三(1994)「中学校数学科教科書における課題学習の現状と今後のあり方」日本数学教育学会学会誌 数学教育第 76 巻第 7 号 pp.36-40
13.久保良宏ら(2001)「数学と社会のつながりに関する中学校・高校の数学科教科書の分析」日本数学教育学会 第 34 回数学教育論文発表会 pp.289-294
14.三輪辰郎(1986.b)「数学的モデル化と教材開発」『学校数学における数学的モデル化の教材開発（三輪辰郎（研究代表））科学研究補助金研究成果報告書 課題番号 59580177）』pp.22-28
15.島田茂(1990)『教師のための問題集』共立出版
16.文部省検定済教科書　新編新しい数学 2（1996）東京書籍　平成 8 年文部省検定済 p.80
17.文部省検定済教科書 微分･積分 数研出版 平成 4 年改訂文部省検定済 p.164

付記：修士論文以降，今後の課題をうけ研究を継続的に行っている。日本科学教育学会第 26 回年会論文集では，「風呂の問題」を改良したものを提示し，第 35 回数学教育論文発表会論文集では，「仮定の意識化」に焦点をあてた授業の構想を提示した。

(せいの　たつひこ
東京学芸大学大学院教育学研究科研究生
〒184-8501　小金井市貫井北町 4-1-1）