数学的な見方考え方を深めるコミュニケーションの役割
―中学校数学における生徒の多様な考えを生かした指導のあり方―

太田　彩乃（東京都立東大和南高校）

1．研究の目的

（1）研究の背景

数学の授業において，数学的に考えさせること，つまり，問題を解決する過程である考え方を生かし数学的な見方考え方を深めさせることが大切である。このことについて，長崎（2007）は，「算数・数学教育の目的には，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的がある。」と述べ，人間形成的目的の一つとして「数学的に考える力を養うこと」を挙げている。また，学習指導要領の改訂に伴い，中学校数学科では，生徒の数学的な思考力・表現力の育成の重要性が述べられている。数学的活動や言葉や数，式，図，表，グラフなどの相互の関連を理解し，それらを適切に用いて問題を解決したり，自分の考えを分かりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどを通して，数学的な思考力・表現力を高めることができると述べられている（文部科学省，2008）。

杉山（2012）は，「問題を解かせておけば考える力が育つかというと，そんな簡単なことでもない。」と述べており，「考え方を学ぶ場」の大切さを挙げている。このことから，課題意識をもって取り組める問題について考えさせ，生徒の多様な考えを共有し数学的コミュニケーションを取り入れ練り上げれば，数学的な見方考え方を深めさせることができると考えられる。このことについて，長崎（2009）は，「自力解決だけでは考えの深化や発展において限界が生じる場合も多い。自分の考えを，他者と関わる活動を通して見つめ直し，考えを質的に高めるということが大切である。（中略）自分で解決できなかった生徒にとって，コミュニケーションによって他者と関わることは，自分だけでは気付かなかった考えの視点を明らかにすることにもつながっていく。さらに，このような自力解決できなかった生徒の存在は，自力で解決できた生徒を，反省的思考へと導くこともある。」と述べている。

連携協力校では，生徒は与えられた課題の解決に取り組む姿勢がついている一方，「そうなるのはなぜか」考えさせる発問には反応がなくなってしまう傾向にあり，解法を再度見直そうとすることが少なく，答えが出たらそれで満足する生徒が多いように感じられる。

以上のことから，多様な考え方の検討により数学的な見方考え方を深めるには，どのような指導が構想できるのか実証的に検討していく必要がある。数学的な見方考え方を深める指導のあり方について研究する。

（2）研究の目的

本研究では，数学的な見方考え方を深める数学的コミュニケーションの役割を明確にし，多様な考えを生かした指導のあり方をさぐることを目的としている。

２．研究の方法および経過

（１）研究の方法

上記の目的のために，以下の方法で研究を進めた。

①「数学的な見方考え方」と「数学的コミュニケーション」について検討し，授業を構成する枠組みをつくる。

②構想に基づいて検証授業を行い，授業における生徒のワークシートへの記述やビデオの発話記録を分析し考察する。

③①，②を通して指導のあり方について示唆を得る。

（２）研究の経過

研究の経過は，表１のとおりである。

表１　研究の経過

期間	基礎研究[2011 年４月～]	実践研究[2012 年７月～11 月]	まとめ[2012 年 12 月～2013 年２月]
内容	○先行研究の分析 ○授業実践や授業参観を通した目的・課題の明確化	○検証授業（連立方程式の利用・１次関数のグラフ・平行と合同）等 ○実践事例「連立方程式の利用」の分析と考察	○実践事例「平行と合同」の分析と考察 ○研究全体のまとめ ○学習指導案の改善

３．研究の成果

（１）先行研究の検討

本研究のテーマに関連して，「数学的な見方考え方」と「数学的コミュニケーション」の捉え方を明らかにする。

「数学的な見方考え方」について，松原（1983）は次のように述べている。

「数学的にものを見，数学的に考えるとは，課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階において次のことがなされることである。

［１］対象を集合としてとらえる。ここで先の方をすでに見直した第一段の抽象化がある。

［２］その集合に対し，別に都合のよい数学的構造をもった第二の集合へ変換する。つまり関数を設定する。ここで飛躍的な抽象化がなされることが多い。

［３］第二の集合の特性を使って解決に導く。その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直すことも多い。」(松原, 1983)

このことについて，「数学的構造をもつ集合Ｘを解決のために都合のよい数学的性質をもつ集合Ｙに変換する」ことを「数学的な見方考え方」と捉える。

「数学的コミュニケーション」について，古藤（1997）は次のように述べている。

「数学の問題解決におけるクラス討議などの場面で，当面した問題の意味に関する情報，及び，その解決の方法などに関する数学的なアイディアを共有し，お互いが合意に達しようとする目的でそれぞれの考えを相手に筋道を立てて的確に伝達したり交換したりする子どもたち同士による練り合いの過程である。」（古藤，1997）

このことについて，生徒の考え方や発言を生かすための教師の発問等の関わりがある上での，「子どもたち同士による練り上げの過程」に「数学的コミュニケーション」を生かすと捉える。

表２　コミュニケーションと４つの型（古藤，1997）

比較検討の段階	コミュニケーションの様相	独立型	序列型	統合型	構造型
１．妥当性の検討	〔考えのたずね合い〕真意をたずね合うコミュニケーション	○	○	○	○
２．関連性の検討	〔考えのつなげ合い〕つなげ，くくり，つけたし合うコミュニケーション	○	○	○	○
３．有効性の検討	〔ずれの練り合い〕ずれを意識し，こだわりをぶつけ合うコミュニケーション		○		○
４．自己選択	〔よさの認め合い〕よさを認め合うコミュニケーション	○	○	○	○

これらの捉えをもとに，古藤（1997）の「コミュニケーションと４つの型」（表２）に基づき，授業の構想図，学習指導案を作成することにした。ねらいに応じていずれかの検討場面を中心として授業を構想する。

（２）実践事例１「平行と合同」

（ｉ）授業の構想と分析の方法

以上のような先行研究の検討を経て，教材研究を進め，授業の構想図と学習指導案を作成した。ここでは，実践事例「平行と合同」を中心に取り上げる。

実践事例「平行と合同」について，連携協力校第２学年１クラス（標準，27名）を対象に，「平行と合同」の授業において,「多角形の内角の和は，三角形の内角の和が180度であることをもとにして求められることについて理解する」ことをねらいとした。構想図は図１の通りである。

「次の①～⑥のそれぞれの多角形で，すべての角の和はいくつになりますか。」という問題を設定した。生徒が

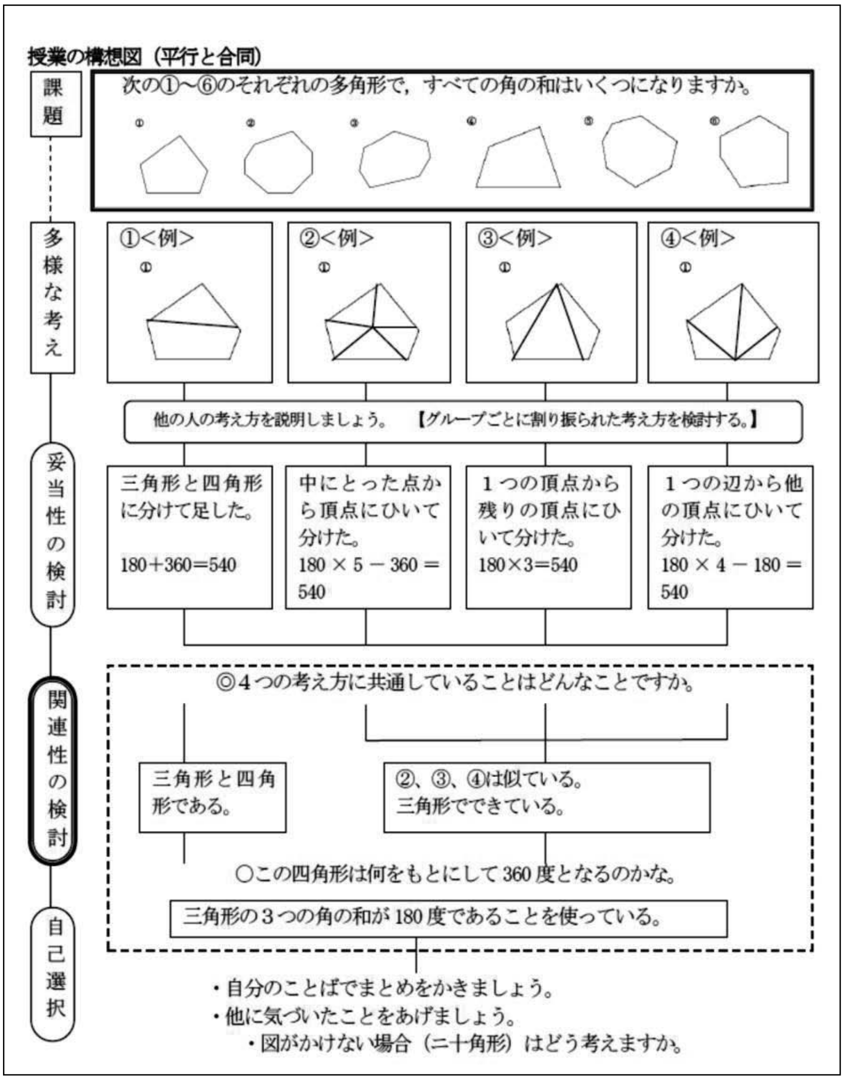


図１　授業の構想図（平行と合同）

自分で考えられるよう，四角形から八角形までの図を提示した。

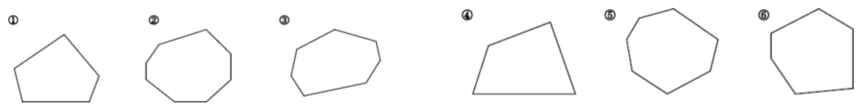
問題を解決する際，多角形を線分で分けるときの様々な考え方は，どれも三角形の内角の和が 180 度であることをもとにしているという点で統合される統合型である。妥当性の検討や中心となる関連性の検討の際，図を読む活動を取り入れ，線分をひく分け方は異なるが考え方の本質は同じであることについて練り上げを行うことで，数学的な見方考え方を深めることができると考えた。

分析の際，生徒の自力解決場面における図や式のワークシートへの記述から「図を分割して考えられると捉え，多角形の内角の和を調べるための根拠に着目すること」が行なわれているか読みとる。その後の図を読む活動や共通点の検討を通しての議論の内容や活動後の生徒のワークシートへの記述をもとに「多角形を分割する際の考え方は，どれも三角形の内角の和が 180 度であると捉えているという点で根拠は同じであること」にせまることができているかを読みとる。その際，次に挙げる視点をもとに考察する。「図を分割し式に表せる」「図を読むことができる」ということは，関数を設定できている数学的な見方考え方である。「規則性について考察している」ということは，何に対して何を決めているか明確でその関数が分かり，多角形の内角の和が求められる根拠への着目である。これらの分析をもとに，どのように改善すれば練り上げを行うことができるか，今後の可能性について考察する。

（ⅱ）授業の概要

分析対象とした授業（平成 24 年 10 月 19 日）は，次の問題を扱ったものである。

問題　次の①～⑥のそれぞれの多角形で，すべての角の和はいくつになりますか。



この問題を提示し，「いろんな求め方があるので，１つみつかったら，他の求め方を探してください。」と発問し，図や式に表し解決させる自力解決の時間を 13 分程度とった。

自力解決をもとに，三角形と四角形に分けた生徒，１つの頂点から残りの頂点に対角線をひいて分けた生徒に，分けた線分のみ紙にかかせた。また，生徒から出なかった，図の内側の１点から頂点に線をひき分ける考え方，辺上の点から他の頂点と結び分ける考え方を教師が紙にかき，４つの考え方を全員に見せた。そして，３～４人グループに割り振り考え方を話し合った後，代表の生徒に発表させた。ここでは，図を読み他の人の考えを説明する活動を行い，全体で考え方を共有した。関連性の検討では，「皆が発表してくれた４つの考え方に共通していることってどんなこと？」と発問し，多角形の内角の和を求める様々な考え方は，どれも三角形の内角の和が 180 度であることをもとにしているという点で本質的には同じであることを扱った。

（iii）生徒の活動の分析

ア．自力解決時の生徒のワークシートへの記述

（a）生徒の自力解決の過程

自力解決を開始してはじめの５分間の生徒の活動は，角の個数を調べて何角形か記述したり，問題④の四角形は 360 度と記述したりする生徒は見られたが，多くの生徒が問題①の五角形を見ながら考えている様子で，ワークシートへの記述は見られなかった。その後，線分を引き，式をかいて解決していく様子がみられた。

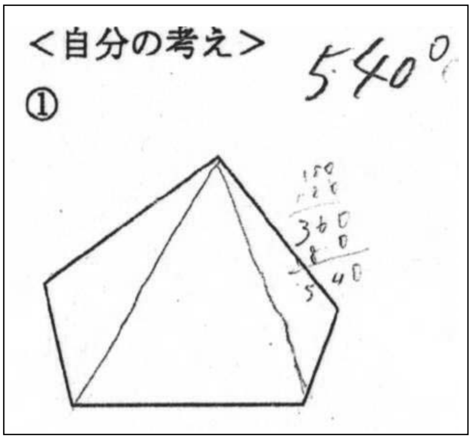


図２　生徒 A の自力解決での問題①の記述

自力解決で図や式に表す活動を行った例として，生徒 A の活動について分析する。生徒 A は５分間考えた末，上の頂点から左下の頂点と右下の頂点に向けそれぞれ対角線をかいた。そして，筆算で 180＋180＝360，360＋180＝540 とかき，540° と記述した。（図２）

このことについて，生徒 A が線をかき出す前に構造化は終わっていて，「頂点から対角線をひく」と考えることは構造化の最後に行われ，「頂点から対角線をひく」ことに気付くまでの試行錯誤が思考の大部分を占めていると考えられる。そして，試行錯誤をしながら考えている生徒 A の思考過程には次のような価値があると考えられる。

［１］五角形の１つの頂点から他の頂点に２本の対角線を引き，三角形を③つに分ける。（五角形は三角形が３つ分である。）

［２］それでも，求める五角形の内角の和は変わらないから，ここでは三角形の内角の和を合わせた角を考える。（X：多角形の内角の和の集合，Y：三角形の内角の和とその三角形の数の集合，ｆ：多角形を１つの頂点から線をひき三角形に分けていくつに分割されるか，とすると，Xを求めることはｆのように変換しYを調べることと同じである。）

［３］その角の和は，内角の和が 180 度である三角形が３つで五角形の角の和になる。それを式でかくと，180＋180＋180（180×３）となり，答えは 540 度となる。

以上のように生徒 A は，課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階において上記のことがなされており，数学的にものを見，数学的に考えていたと解釈できる。

（b）生徒の記述の多様性

自力解決後の生徒のワークシートへの記述をみると，生徒 A の考え方以外では，約８割の生徒が多角形の頂点と頂点を結び三角形と四角形に分ける考え方をしていた。その中で，三角形と四角形に分けるという点で同じ考え方と捉えられるが，表現方法は異なる生徒の記述が見られた。図３，図４，図５，図６は様々な生徒の問題⑥の六角形の分け方である。

図３，図４，図５のように記述した生徒は，三角形の内角の和が 180 度であることと四角形の内角の和は 360 度であること，図６のように記述した生徒は四角形の内角の和が 360 度であることを根拠にしていると考えられる。これらの考え方は，「X：多角形の内角の和の集合，Y：三角形の内角の和とその三角形の数，四角形の内角の和とその四角形の数の集合，ｆ：多角形を頂点と頂点を結んだ線をひき三角形や四角形に分けてそれぞれいくつずつに分割されるか」という数学的な見方考え方をしていると考えられる。どの生徒の考え方も表現方法は異なるが，数学的な見方考え方としては共通点があると考えられる。

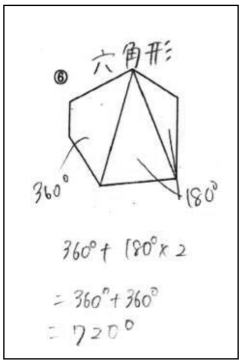


図３　生徒の多様な考え方１

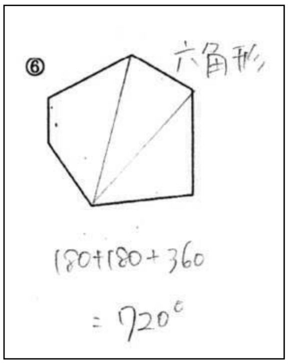


図４　生徒の多様な考え方２

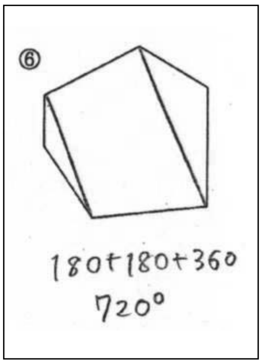


図５　生徒の多様な考え方３

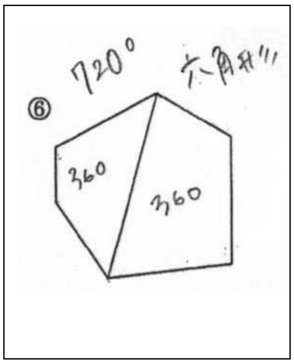


図６　生徒の多様な考え方４

（c）規則性に着目した生徒Ｂの記述

生徒Ｂは自力解決にて，図７のように解決し，その後文章で図８のように記述していた。

頂点が１つ増えると多角形の内角の和は180度ずつ増えていく関数であることに気づき，規則性に着目している。これは，多角形の頂点の数に対して内角の和が決まるということに着目していると同時に，三角形の内角の和が180度であるという根拠への着目と捉えることもできると考えられる。

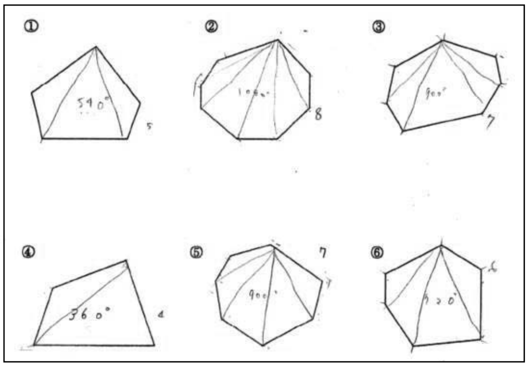


図７　生徒Ｂの自力解決における記述

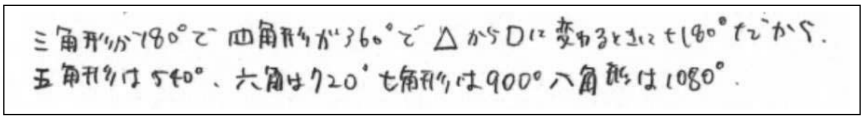


図８　生徒Ｂの自力解決における文章の記述

イ．グループ活動時の生徒ＣとＤの発言と記述

グループ活動の際，生徒Ｃは生徒Ｄに，「三角形の角の和が180度であるのはなぜか」と尋ねていた。生徒Ｄは図９の下部にある２つの図をかきながら説明していた。この説明については議論の必要があるが，三角形の内角の和が180度になる根拠について探る姿勢がみられたと捉えることができる。

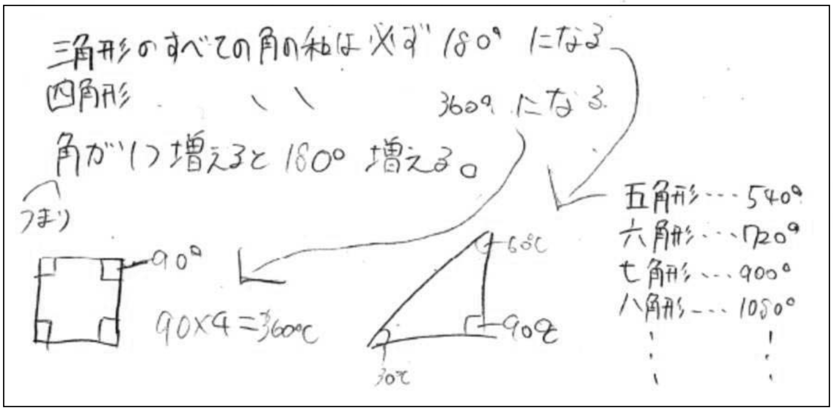


図９　生徒Ｄのグループ活動時の記述

また，生徒Ｃと生徒Ｄが所属する４人グループは，頂点から残りの頂点に対角線をひいた考え方について図を読む活動を行っていた。考え方について検討した後，図11のように，「つまり角が１つ増えると180°増える。」と記述し，順に並べて確認していた。ア（c）

（規則性に着目した生徒Ｂの記述）と同様に，規則性への着目がみられた。

ウ．関連性の検討

グループ活動後に代表者が考え方を説明し，全体での共有を行った。その後，４つの考え方をすべて取り上げ，関連性の検討を取り入れた。記録１は，その一部を抜き出したものである。記録１で下線を入れた箇所は，図を読む活動である。

４つの考え方に共通していること，似ている考え方はないかと発問し共通点を考えさせた。Ｓ２やＳ３の発言から，２番，３番，４番（それぞれ図１の②，③，④）の考え方の根拠に着目することができ，３つの考え方は三角形の内角の和が 180 度であることをもとにしているということについて探ることができたと考えられる。

記録１　授業記録（括弧内は筆者捕捉）

T	じゃあ，この皆が発表してくれた４つの考え方に共通していることってどんなこと？
S	・・・
T	じゃあ，考え方 1，2，3，4（構想図の番号に同じ）ってしています。例えば，どれとどれが考え方似ていると思う？誰か気づいたことある人？ない？
S1	・・・分からない
S2	んー・・・３番と４番・・・
T	おう，理由は？
S2	・・・
T	S2 さん，３と４は似ているね。どこが？
S2	三角形になっている。
T	そうだね。皆よいかな？
S3	２番も。
T	そうだね。他にはないかな？
S	・・・(数名の生徒が首を横にふる)
T	たぶん皆自然にやっているんだけど，１番(考え方 1)，三角形と四角形に分けたんだよね。最初にもきいたんだけど，この四角形って何をもとにして 360 度ってなるのかな？
S	・・・
T	んーと，じゃあ，3 の④(考え方 3 の四角形)は何をもとにしている？
S4	三角形だ！

特に，Ｓ２は３番と４番と答えたが，自力解決の際に３番の考え方をしており，グループでの検討では４番の考え方について検討していた。自分で考え数学的な見方考え方を深めたものに関しては，共通点を見つけやすかったのではないかと考えられる。

また，生徒は１番（図１の①）の考え方は根拠が異なると捉えていると読み取れる。「四角形の内角の和は何をもとにして 360 度であるといえるか」について尋ね反応はなかったが，３番の問題④の四角形（２つの三角形に分けた考え方）に着目させることで，四角形の内角の和が 360 度であることは三角形の内角の和が 180 度であることをもとにしていると捉えることができたと考えられる。それぞれの考え方に着目させることで，根拠に着目し数学的な見方考え方を深めることができたと考えられる。

記録２で下線を入れた箇所にあるように，再度４つの考え方について共通点を探る発問をすると，三角形の内角の和が 180 度であることを根拠にしているという内容の発言を，生徒の言葉で引き出すことができた。このことから，関連性の検討において数学的コミュニケーションを取り入れ，図を読む活動を行い数学的な見方考え方を深められたと考えられる。

記録２　授業記録（括弧内は筆者捕捉）

S4	三角形だ！
T	そうだね。はい。じゃあ，えーと，４つの方法に共通することは？
S5	三角形の角の 180 度を使っていること？
T	そう，多角形の角の和を求めるには，三角形の３つの角の和が 180 度であることをもとにしていろんな方法でやりましたね。いいかな？
S6	あーそういうことかぁ。
S	（３分の２くらいの生徒はうなずいている）

エ．まとめと学習感想

まとめへの記述としては,「全ての求め方は三角形をもとにしている」「三角形の角の和は180度ということを利用して，多角形の角の和を求めることができる」などが見られた。自力解決の段階では，四角形の内角の和が360度であることのみ記述していた生徒や三角形と四角形に分けて考えていた生徒の理解に変化が見られたと考えられる。よって，数学的コミュニケーションを取り入れたことで，数学的な見方考え方を深め理解させることができたと考えられる。

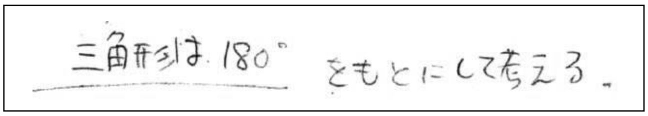


図 10　生徒 E のまとめへの記述

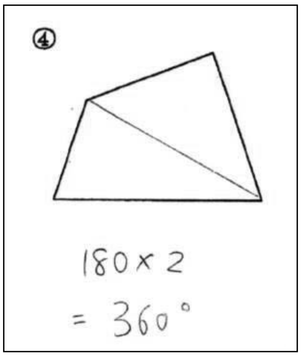


図 11　生徒 E の自力解決での問題④の記述

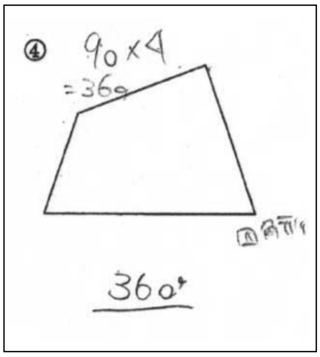


図12　生徒Fの自力解決での問題④の記述

生徒Eは,「三角形は180度をもとにして考える」（図10）と記述し，自力解決では図11のように記述していた。一方，生徒Fは「多角形は三角形や四角形からなる」(図13) と記述し，自力解決での記述は図12だった。自力解決段階の生徒Eと生徒Fの四角形の内角の和が360度となる考え方が異なり，それがまとめの記述に表れていたと考えられる。

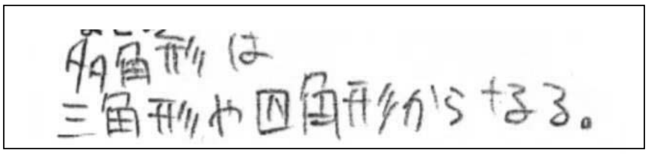


図 13　生徒 F のまとめへの記述

（ⅳ）考察

以下の結果より，関連性の検討場面において，以下の３つの改善点が必要であると考えられる。

１つ目としては，記録１に挙げたように，三角形と四角形に分けた考え方は，三角形の内角の和が180度であることをもとにしていると捉えられていない様子であった。まとめへの記述でも,「多角形は三角形や四角形からなる」(図13) とまとめた生徒がいた。よって,「四角形の内角の和が

図 14　授業の構想図（連立方程式の利用）

360 度であるのはなぜか」について，生徒の考えを検討させる必要があったと考えられる。例えば，三角形と四角形に分けている生徒が多くいた中で，図３，図４，図５，図６のように様々な分け方をしていた。それらを取り上げ検討することができる。また，図 11 や図 12 のように問題④の四角形について様々な根拠をもとにして 360 度と求めていたことから，問題④の四角形に着目させ検討することもできると考えられる。

２つ目としては，記録２に挙げたように，生徒 S２によって，授業全体のまとめとなる発言が出てきた。時間がなく検討を終えたが，まとめの記述などから十分に理解できていない生徒もいたと考えられる。よって，検討した４つ以外の考え方を検討の途中でも取り上げ検討する必要があったと考えられる。例えば，構想の際は規則性への着目ばかりにならないよう考えていたため取り上げなかったが，規則性に着目した生徒 B，生徒 C，生徒 D の考えをもとに，三角形の内角の和が 180 度であるという根拠に着目させることができると考えられる。

３つ目としては，生徒 C が三角形の内角の和が 180 度になる根拠について尋ねた際，生徒 D は代表的な三角形の例で説明していた記録が残っており，その場面で小学校時点での検討を振り返らせる必要があった。それだけではなく，例えば，「問題③と問題⑤が同じ答えになるのはなぜか」という切り口から，どんな多角形でもその内角の和は同じであるということについて検討することができると考えられる。

（３）実践事例２「連立方程式の利用」

実践事例「連立方程式の利用」においては，連携協力校第２学年２クラス（37 名，35 名）を対象に，「表をつくるときと立式するときの考え方は，どちらも比例する量の和（関数関係）を捉えているという点で同じであると理解できる。」ことをねらいとした。構想図は図 14 である。実際の授業では，自力解決において図，表，式に表す活動を行い，歩いた時間と歩いた距離の関係を表した表と連立方程式の解法を取り上げた。関連性の検討では表を読む活動を行った。この授業の考察から，関連性の検討場面での改善の必要性が考えられた。「連立方程式の立式」場面において，生徒が考えた表や式をもとに，関数関係に着目させて表や式を読み，練り上げる可能性があることが分かった（太田，2012）。

４．まとめと課題

（１）研究全体のまとめ

数学的コミュニケーションは，妥当性の検討や関連性の検討の段階で数学的な見方考え方を深めて授業のねらいを達成させる役割を果たした。具体的には，図や表，式を読む活動の際，全体で検討していくことで，発言をした本人や説明を聞いた生徒の数学的な見方考え方を深めることができていた。

２つの実践事例より，統合化可能な多様性のある考え方を生かし，関連性の検討を中心として数学的コミュニケーションを取り入れ数学的な見方考え方を深める授業での教師の手立ては，例えば，以下のようなものが考えられる。

	教師の発問や活動の設定（例）	生徒の発言や活動(例)	根拠・理由
妥当性の検討段階＜考えのたずね合い＞	図のみ, 式のみなどの記述により発表させ, 別の考え方をしている生徒に図や式を読む活動を行わせる。「なぜその図になるのですか。」「この考え方を説明してください。」	他の人の考え方を説明したり，自分の考え方とは別の考え方の説明を聞いたりする。「～だと思います。」「なぜ～となるのですか。」	妥当性について検討するだけでなく，関連性への着目に視点が向きやすくなると考えられるから。自分でじっくり考えたことの関連性には気づきやすいから。
関連性の検討段階＜考えのつなげ合い＞	・考え方の共通点を探らせる。その理由を確認する。「考え方の共通点はなんですか。」「似ている考え方はありますか。」 ・あらたに出た他の考え方を検討する。【図を読む】	共通点は何か考え方を振り返り考える。新しい考え方にも共通点があるか探る。「○と△は～なので同じです。」「○と△が同じなのはなぜですか。」	・共通点を探ることで，振り返って図を読み数学的な見方考え方，そして授業のねらいに着目できるから。 ・数学的な見方考え方をより深めることができるから。
よさの認め合い（可能性）	まとめ(自分が分かったこと)，学習感想 (考えたこと・分からなかったこと等)をかかせ,「自分でまとめる」活動を行った。	解法のよさ，アイディアのよさなど，数学的な考え方について振り返っている生徒がいた。	発表し共有することで，更に数学的な見方や考え方を深める活動になるのではないかと考えられるから。

（２）今後の課題

議論の時間の確保，議論の質の向上が研究全体を通しての大きな課題であった。その改善のためには継続的な指導と議論の論点を明確にすることが欠かせないと考える。よって，今後の課題は，本研究で得られた知見をもとに，数学的コミュニケーションを取り入れ練り上げを行うことができる指導計画を作成し，授業実践を行い考察していくことである。

５．主要参考・引用文献

太田彩乃「「連立方程式の立式」場面における数量関係の捉えについての一考察―表に表す活動や表を読む活動を通して―」第 45 回数学教育論文発表会論文集，2012 年，pp.521-526

古藤　怜『コミュニケーションで創る新しい算数学習―多様な考えの生かし方まとめ方―』東洋館出版，1997 年

杉山吉茂　『確かな算数・数学教育をもとめて』東洋館出版，2012 年

長崎栄三他編著『豊かな数学の授業を創る』明治図書，2009 年

長崎栄三/滝井章編著『算数の力を育てる/第三巻　算数の力　数学的な考え方を乗り越えて』東洋館出版，2007 年

半田進編著　『考えさせる授業算数・数学』東京書籍，1995 年

松原元一 『数学的見方考え方　子どもはどのように考えるか』 国土社，1983 年

文部科学省　『中学校学習指導要領解説　数学編』， 2008 年